

GENERAL LIBRARY
SEP 2 1919

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

L. E. J. BROUWER, CONSTANTIN CARATHÉODORY, OTTO HÖLDER,
CARL NEUMANN, MAX NOETHER

GEGENWÄRTIG HERAUSGEgeben

von

FELIX KLEIN

IN GÖTTINGEN

WALTHER v. DYCK

IN MÜNCHEN

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

79. Band. 3. Heft

Mit 3 Figuren im Text

Ausgegeben am 5. Dezember 1918



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1918

INHALT.

	Seite
Über die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion. Von L. E. J. Brouwer in Amsterdam	206
Lebesguesches Maß und Analysis Situs. Von L. E. J. Brouwer in Amsterdam	219
Gebietsdeterminanten. Von Leopold Löwenheim in Berlin-Lichtenberg	223
Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Von Fritz Carlson in Upsala	237
Eine neue Methode zur Lösung der Randwertaufgabe partieller Differentialgleichungen. Von E. Trefftz in Aachen. (Mit 3 Figuren im Text)	246
Über das Fourierintegral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos tx dx$. Von Felix Bernstein in Göttingen	265
Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation. Von J. Nielsen in Konstantinopel	269
Beitrag zur Kleinschen Theorie des Ikosaeders. Von V. Geilen in Münster i. W.	273
Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Von Otto Haupt z. Zt. Würzburg	278
Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, daß die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Von Alexander Ostrowski in Göttingen	286
Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus der Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten mit Hilfe von Normalkoordinaten. Von H. Vermeil in Göttingen	289

Wir ersuchen unsere geachten Herren Mitarbeiter, etwaige den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird uns möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Generalregister zu den mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. Geh. M. 7.—

Verantwortl. Redaktion: F. Klein, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, W. v. Dyck, München, Hildegardstr. 5, David Hilbert, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, Otto Blumenthal, Aachen, Rützcherstraße 50.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtreduktion

Theorie der Elektrizität

Von Prof. Dr. M. Abraham

I. Band: Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität
Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Hofrat Prof. Dr. A. Föppl. 5. umgearbeitete Auflage herausgegeben von Prof.

Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. Geh. M. 18.—, geb. M. 14.—

Hierzu Teuerungsauschläge des Verlages und der Buchhandlungen

„Das vorliegende Buch der Elektrizität darf ohne Einschränkung als erstklassige Leistung bezeichnet werden. Es vertritt sowohl in der Verwertung der Maxwell'schen Theorie den modernen Standpunkt, der in dieser Theorie die Vorstufe zu einer atomistischen, der sog. Elektronentheorie, sieht, als auch in der Form: der Verfasser bedient sich durchweg der Symbole der Vektoranalysis, die sich in der Tat zur Wiedergabe der Faraday'schen Idee vom Kraftfluß am besten eignet.“

Endlich möchte ich noch hervorheben — was man infolge der Sprödigkeit des Stoffes in den meisten derartigen Werken vermissen muß —, daß die Form der Darstellung wie Handhabung der Sprache muster-gültig ist.“

Physikalische Zeitung.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

204

205

211

223

237

246

265

269

273

278

286

289

-

294

ten

chi

a.

en.

ien

ien

an.

elli

u.

en,

en,

ion



Über die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion.

Von

L. E. J. BROUWER in Amsterdam.

Es handelt sich um den Beweis der folgenden Eigenschaft:

Ist A eine abgeschlossene Punktmenge des n-dimensionalen Raumes und f eine beschränkte Funktion, die auf A definiert und in jedem Häufungspunkte von A stetig ist, so kann man eine im ganzen Raum stetige, beschränkte Funktion F finden, die in jedem Punkte von A gleich f ist.

Von dieser Eigenschaft existieren explizite Beweise von De la Vallée Poussin*) und Bohr**), die beide die Funktion F mittels eines unendlichen Prozesses (ersterer mittels einer unendlichen Reihe, letzterer mittels eines Integrals) konstruieren. Eine elementarere Hilfsmittel benutzende Herstellungsart der Funktion F läßt sich aus dem § 4 meines Beweises der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets (Math. Ann. 71, S. 309—311), dessen Gegenstand von einer allgemeineren Aufgabe gebildet wird, wie folgt herauschäulen.

Wir nehmen mit dem n-dimensionalen Raum eine solche Fundamentalfolge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ von simplizialen Zerlegungen (vgl. Math. Ann. 71, S. 101) vor, daß ξ_{r+1} eine Unterteilung von ξ_r ist, und daß die Größe der zu ξ_r gehörigen Grundsimplexe für unbeschränkt wachsendes r gleichmäßig gegen Null konvergiert. Zu jedem ξ_r kann man eine solche von Grundsimplexen gebildete in der Komplementärmenge A' von A enthaltene abgeschlossene Gebietsmenge G_r bestimmen, deren Grenze für unbeschränkt wachsendes r gleichmäßig gegen A konvergiert. Wir setzen $G_1 = g_1$, bezeichnen die von denjenigen Grundsimplexen von G_{r+1} , welche nicht in G_r enthalten sind, gebildete Punktmenge mit g_{r+1} und verstehen unter einem ϵ , ein zu g_r gehöriges Grundsimplex von G_r . Wir dürfen annehmen, daß für

*) „Intégrales de Lebesgue, Fonctions d’Ensemble, Classes de Baire“, § 125.

**) Mitgeteilt von Carathéodory in „Vorlesungen über reelle Funktionen“, § 541, 542.

jedes ν die Grenzen von G_ν und $G_{\nu+1}$ keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, und kein σ_ν gleichzeitig die Grenze von $G_{\nu-1}$ und die Grenze von G_ν berührt.

Von einem σ_ν , welches die Grenze von G_ν berührt, können für $1 \leq p \leq n-1$ eine oder mehrere p -dimensionale Seiten nach $\xi_{\nu+1}$ zerlegt sein. Von den derartigen σ_ν bestimmen wir in folgender Weise eine „aus ξ_ν und $\xi_{\nu+1}$ gemischte“ simpliziale Zerlegung: Wir gehen aus von den schon vorhandenen simplizialen Zerlegungen der Kanten. Sodann bestimmen wir von jeder noch nicht zerlegten zweidimensionalen Seite, welche zerlegte Kanten besitzt, eine „gemischte“ simpliziale Zerlegung, indem wir aus einem in ihrem Innern willkürlich gewählten Punkt die schon vorhandene simpliziale Zerlegung ihrer Kanten projizieren; die übrigen zweidimensionalen Seiten bleiben unzerlegt bzw. behalten ihre bisherige Zerlegung bei. In dieser Weise fortlaufend, bestimmen wir, nachdem die Zerlegungen der p -dimensionalen Seiten festgelegt sind, von jeder noch nicht zerlegten $(p+1)$ -dimensionalen Seite, welche zerlegte p -dimensionale Seiten besitzt, eine „gemischte“ simpliziale Zerlegung, indem wir aus einem in ihrem Innern willkürlich gewählten Punkt die schon vorhandene simpliziale Zerlegung ihrer p -dimensionalen Seiten projizieren; die übrigen $(p+1)$ -dimensionalen Seiten bleiben unzerlegt bzw. behalten ihre bisherige Zerlegung bei.

Wenn wir unter den ξ_ν einerseits diejenigen σ_ν , welche die Grenze von G_ν nicht berühren, andererseits die Grundsimplexe der aus ξ_ν und $\xi_{\nu+1}$ gemischten simplizialen Zerlegungen derjenigen σ_ν , welche die Grenze von G_ν berühren, verstehen, so können wir die Punktmenge A' als eine offene n -dimensionale Mannigfaltigkeit (vgl. Math. Ann. 71, S. 98) und die zu den verschiedenen Werten von ν gehörigen ξ_ν als die Grundsimplexe einer simplizialen Zerlegung ξ dieser offenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit auffassen.

Nunmehr weisen wir jedem Grundpunkte H von ξ einen solchen Punkt H_1 von A' zu, welcher von ihm eine das Doppelte der kleinstmöglichen nicht übersteigende Entfernung besitzt, und setzen den Wert der zu bestimmenden Funktion F in H gleich ihrem schon bekannten Werte in H_1 . Um weiter den Wert von F in einem willkürlichen Punkte P von A' , welches dem Innern oder der Grenze des Grundsimplexes ξ von ξ angehört, zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen: P ist Schwerpunkt von gewissen in den Eckpunkten E_1, \dots, E_{n+1} von ξ konzentrierten positiven Massen μ_1, \dots, μ_{n+1} . Wenn die dem obigen gemäß in E_1, \dots, E_{n+1} bestimmten Werte von F der Reihe nach gleich $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ sind, so setzen wir den Wert von F in P gleich $\frac{\varphi_1 \mu_1 + \dots + \varphi_{n+1} \mu_{n+1}}{\mu_1 + \dots + \mu_{n+1}}$. Hiermit

ist der Wert von F in jedem Punkte sowohl von A wie von A' , mithin in jedem Punkte des Raumes festgelegt.

Der Stetigkeitsbeweis braucht nur für einen willkürlichen Punkt K der Begrenzung von A geführt zu werden. Zu diesem Zwecke wählen wir eine beliebig kleine positive Zahl ε_1 . Alsdann existiert eine solche mit ε_1 gegen Null konvergierende positive Zahl ε_2 , daß in jedem in einer Entfernung $\leq \varepsilon_2$ von K liegenden, zu A gehörigen Punkte der Wert von f um einen absoluten Betrag $\leq \varepsilon_1$ von $f(K)$ verschieden ist, und eine solche mit ε_2 gegen Null konvergierende positive Zahl ε_3 , daß jedes ξ , welches in seinem Innern oder auf seiner Grenze einen in einer Entfernung $\leq \varepsilon_3$ von K liegenden Punkt enthält, ganz innerhalb einer Entfernung $\leq \frac{1}{4} \varepsilon_2$ von K gelegen ist, mithin nur solche Werte von F , welche von $F(K)$ um einen absoluten Betrag $\leq \varepsilon_1$ verschieden sind, aufweisen kann, so daß in jedem in einer Entfernung $\leq \varepsilon_3$ von K liegenden Punkte des Raumes der Wert von F um einen absoluten Betrag $\leq \varepsilon_1$ von $F(K)$ verschieden ist.

Lebesguesches Maß und Analysis Situs.

Von

L. E. J. BROUWER in Amsterdam.

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, für das Lebesguesche Maß die vollständige Abwesenheit von für die Analysis Situs invarianten Eigenschaften darzutun.*). Die Beweisführung, welche für den linearen Fall noch keinerlei Schwierigkeiten bietet**), beschränkt sich im folgenden auf ebene Punktmengen; doch läßt sich, wie ich glaube, die hier angewandte Methode ohne prinzipielle Änderungen auf Punktmengen des n -dimensionalen Raumes übertragen.

§ 1. Ableitung eines Hilfssatzes.

Wir denken in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem, verstehen unter einer Breitelinie $b_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ (bzw. unter einer Längelinie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$) eine gerade Linie, welche der X -Achse (bzw. der Y -Achse) parallel ist und von ihr eine im ternären System gemessene positive Entfernung $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ besitzt, und betrachten eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C , welche ganz zum von den Längelinien l_0 und l_1 und den Breitelinien b_0 und b_1 begrenzten abgeschlossenen Quadrat k gehört, aber weder von l_0 noch von l_1 Teilsegmente enthält. Wir wählen eine solche Fundamentalreihe η_1, η_2, \dots von positiven Zahlen < 1 , daß das unendliche Produkt

*) Man vergleiche folgende Äußerung Borels, welche mir auf eine entgegengesetzte Vermutung hinzuweisen scheint: „Les ensembles qui ne sont pas de mesure nulle sont formés d'une matière simple, avec des ensembles continu positifs ou négatifs; ils sont hétérogènes au continu; les ensembles de mesure nulle peuvent être, au contraire, sensiblement homogènes au continu, c'est-à-dire identiques à eux-mêmes dans des intervalles aussi petits que l'on veut ... la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale“ (Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), S. 17).

**) Beispiele topologischer Äquivalenz von linearen Nullmengen und Komplementarmengen von Nullmengen finden sich u. a. in einem Schreiben von mir an Herrn Blumenthal aus dem Jahre 1913; doch waren solche damals auch anderen Mathematikern, z. B. Herrn Bohl, bekannt; das erste in der Literatur auftretende Beispiel dürfte sich finden bei Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, § 337.

$\prod(1 - \eta_r)$ nicht verschwindet, und das unendliche Produkt $\prod(1 + \eta_r)$ einen endlichen Wert besitzt, und nehmen mit dem Quadrate k der Reihe nach eine Fundamentalreihe τ_1, τ_2, \dots von eineindeutigen und stetigen Transformationen vor, welche alle Breitelinien nebst l_0 und l_1 in sich überführen, und im folgenden näher definiert werden sollen.

Definition von τ_1 . Wir bezeichnen mit s_0, s_1 und s_2 die Streifen, in welche k durch b_1 und b_2 zerlegt wird, und bestimmen eine endliche Folge q_1, q_2, q_3, \dots von mit k homothetischen und keinen Punkt von C enthaltenden Quadraten, welche abwechselnd zwischen b_0 und b_1 und zwischen b_2 und b_3 liegen, während ihre Mittelpunkte wachsende Abszissen besitzen, keine Längelinie zwei q_r trifft, der erste Mittelpunkt auf l_0 und der letzte auf l_1 gelegen ist, und für jedes r der Abstand der Schnittpunkte der Längelinien durch die Mittelpunkte von q_r und q_{r+1} mit einer willkürlichen Breitelinie weniger als ε_1 beträgt. Der Minimalwert der Seitenlängen der q_r sei ξ_1 . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien, welche q_{2r-1} in drei kongruente Rechtecke zerlegen, mit b_0 bzw. b_1 bezeichnen wir mit A_{2r-1} und B_{2r-1} bzw. C_{2r-1} und D_{2r-1} . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien, welche q_{2r} in drei kongruente Rechtecke zerlegen, mit b_2 bzw. b_3 bezeichnen wir mit E_{2r} und F_{2r} bzw. G_{2r} und H_{2r} . Sodann verstehen wir unter den *Hauptlinien zweiter Ordnung* die Streckenzüge $B_{2r-1} D_{2r-1} E_{2r} G_{2r}$ und $H_{2r} F_{2r} C_{2r+1} A_{2r+1}$ nebst den in l_0 und l_1 enthaltenen Seiten von k . Zerlegen wir die zwischen zwei bestimmten aufeinanderfolgenden Hauptlinien zweiter Ordnung enthaltenen Teilstrecken von Breitelinien in je zwei Segmente, welche auf jeder Breitelinie dasselbe Verhältnis aufweisen, so nennen wir den geometrischen Ort der Teilpunkte eine *Längelinie zweiter Ordnung*. Diejenige Längelinie zweiter Ordnung, welche b_0 im selben Punkte wie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ trifft, bezeichnen wir mit ${}_2 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ und bestimmen τ_1 durch die Eigenschaft, daß sie das in k liegende Segment von $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_r in ${}_2 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt. Durch geeignete Wahl von ε_1 sorgen wir dafür, daß für jede Wahl von a_1 die zwischen ${}_2 l_{a_1}$ und ${}_2 l_{a_1+1}$ enthaltene Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie zwischen $\frac{1}{3}(1 - \eta_1)$ und $\frac{1}{3}(1 + \eta_1)$ liegt.

Definition von τ_2 . Sei m_2 eine solche positive ganze Zahl, daß für jede Wahl von a_1, a_2, \dots, a_{m_2} die zwischen ${}_2 l_{a_1 \dots a_{m_2}}$ und ${}_2 l_{a_1 \dots a_{m_2-1}(a_{m_2}+1)}$ enthaltene Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie $< \frac{1}{9}$ ist. Wir bezeichnen mit $s_{\mu 0}, s_{\mu 1}, s_{\mu 2}$ die Streifen, in welche s_{μ} durch $b_{\mu 1}$ und $b_{\mu 2}$ zerlegt wird, und bestimmen in jedem s_{μ} eine endliche Folge ${}_{\mu} q_1, {}_{\mu} q_2, {}_{\mu} q_3, \dots$ von mit k homothetischen und keinen Punkt von C enthaltenden Quadraten, welche abwechselnd zwischen $b_{\mu 0}$ und $b_{\mu 1}$ und zwischen $b_{\mu 1}$

und $b_{\mu+1}$ liegen, während die Längelinien zweiter Ordnung durch ihre Mittelpunkte b_μ in Punkten mit wachsenden Abszissen treffen, keine Längelinie zweiter Ordnung zwei μq_r trifft, der erste Mittelpunkt auf l_0 und der letzte auf l_3 gelegen ist, und für jedes r der Abstand der Schnittpunkte der Längelinien zweiter Ordnung durch die Mittelpunkte von μq_r und μq_{r+1} mit einer willkürlichen Breitelinie weniger als ε_2 beträgt. Der Minimalwert der Seitenlängen der μq_r , wenn wir sowohl μ wie r variieren lassen, sei ξ_2 . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien zweiter Ordnung, welche die der X-Achse parallele Mittellinie von μq_{2r-1} in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu 0}$ bzw. $b_{\mu 1}$ bezeichnen wir mit μA_{2r-1} und μB_{2r-1} bzw. μC_{2r-1} und μD_{2r-1} . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien zweiter Ordnung, welche die der X-Achse parallele Mittellinie von μq_{2r} in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu 2}$ bzw. $b_{\mu 3}$ bezeichnen wir mit μE_{2r} und μF_{2r} bzw. μG_{2r} und μH_{2r} . Sodann verstehen wir unter den *Teilhauplinien dritter Ordnung* von s_μ die Streckenzüge $\mu B_{2r-1} \mu D_{2r-1} \mu E_{2r} \mu G_{2r}$ und $\mu H_{2r} \mu F_{2r} \mu C_{2r+1} \mu A_{2r+1}$ nebst den in l_0 und l_3 enthaltenen Seiten von s_μ . Zerlegen wir die zwischen zwei bestimmten aufeinanderfolgenden Teilhauplinien dritter Ordnung von s_μ enthaltenen Teilstrecken von Breitelinen in je zwei Segmente, welche auf jeder Breitelinie dasselbe Verhältnis aufweisen, so nennen wir den geometrischen Ort der Teilpunkte eine *Teillängelinie dritter Ordnung* von s_μ . Unter einer *Längelinie dritter Ordnung* verstehen wir einen aus Teillängelinien dritter Ordnung der verschiedenen s_μ zusammengesetzten, b_0 und b_1 verbindenden Streckenzug. Diejenige Längelinie dritter Ordnung, welche b_0 im selben Punkte wie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ trifft, bezeichnen wir mit $s^l_{a_1 \dots a_{m_1} a_2 \dots}$ und bestimmen τ_2 durch die Eigenschaft, daß sie $s^l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_r in $s^l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt. Wir wählen $\varepsilon_2 < \frac{1}{27} \xi_1$, und sorgen weiter durch geeignete Wahl von ε_2 dafür, daß für jede Wahl von a_1, a_2, \dots, a_{m_1} das Verhältnis von der zwischen $s^l_{a_1 \dots a_{m_1-1} a_{m_1}}$ und $s^l_{a_1 \dots a_{m_1-1} (a_{m_1}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie und der zwischen $s^l_{a_1 \dots a_{m_1-1} a_{m_1}}$ und $s^l_{a_1 \dots a_{m_1-1} (a_{m_1}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke derselben Breitelinie zwischen $1 - \eta_2$ und $1 + \eta_2$ liegt.

Definition von τ_n . Sei m_n eine solche positive ganze Zahl $> m_{n-1}$, daß für jede Wahl von a_1, a_2, \dots, a_{m_n} die zwischen $s^l_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}$ und $s^l_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}$ enthaltene Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie $< \frac{1}{3^n}$ ist. Wir bezeichnen mit $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 0}, s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}, s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ die Streifen, in welche $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ durch $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$ und $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ zerlegt wird, und bestimmen in jedem $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ eine endliche Folge $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_1, \mu_1 \dots \mu_{n-1} q_2,$

$\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_s, \dots$ von mit k homothetischen und keinen Punkt von C enthaltenden Quadraten, welche abwechselnd zwischen $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 0}$ und $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$ und zwischen $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ und $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 3}$ liegen, während die Längelinien n^{ter} Ordnung durch ihre Mittelpunkte $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ in Punkten mit wachsenden Abszissen treffen, keine Längelinie n^{ter} Ordnung zwei $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_r$, trifft, der erste Mittelpunkt auf l_0 und der letzte auf l_3 gelegen ist, und für jedes ν der Abstand der Schnittpunkte der Längelinien n^{ter} Ordnung durch die Mittelpunkte von $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_r$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_{r+1}$ mit einer willkürlichen Breitelinie weniger als ε_n beträgt. Der Minimalwert der Seitenlängen der $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_r$, wenn wir sowohl ν wie die μ_r variieren lassen, sei ξ_n . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien n^{ter} Ordnung, welche die der X -Achse parallele Mittellinie von $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_{2r-1}$ in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 0}$ bzw. $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$ bezeichnen wir mit $\mu_1 \dots \mu_{n-1} A_{2r-1}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} B_{2r-1}$ bzw. $\mu_1 \dots \mu_{n-1} C_{2r-1}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} D_{2r-1}$. Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien n^{ter} Ordnung, welche die der X -Achse parallele Mittellinie von $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_{2r}$ in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ bzw. $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 3}$ bezeichnen wir mit $\mu_1 \dots \mu_{n-1} E_{2r}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} F_{2r}$ bzw. $\mu_1 \dots \mu_{n-1} G_{2r}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} H_{2r}$. Sodann verstehen wir unter den *Teilhauptlinien* $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ die Streckenzüge $\mu_1 \dots \mu_{n-1} B_{2r-1} D_{2r-1} \mu_1 \dots \mu_{n-1} E_{2r} \mu_1 \dots \mu_{n-1} G_{2r}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} H_{2r} \mu_1 \dots \mu_{n-1} F_{2r} C_{2r+1} \mu_1 \dots \mu_{n-1} A_{2r+1}$ nebst den in l_0 und l_3 enthaltenen Seiten von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$. Zerlegen wir die zwischen zwei bestimmten aufeinanderfolgenden Teilhauptlinien $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ enthaltenen Teilstrecken von Breitelinien in je zwei Segmente, welche auf jeder Breitelinie dasselbe Verhältnis aufweisen, so nennen wir den geometrischen Ort der Teilpunkte eine *Teillängelinie* $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$. Unter einer *Längelinie* $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verstehen wir einen aus Teillängelinien $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der verschiedenen $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ zusammengesetzten, b_0 und b_1 verbindenden Streckenzug. Diejenige Längelinie $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche b_0 im selben Punkte wie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ trifft, bezeichnen wir mit ${}_{n+1} l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ und bestimmen τ_n durch die Eigenschaft, daß sie ${}_n l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_r in ${}_{n+1} l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt. Wir wählen

$$\varepsilon_n < \frac{1}{27} \xi_{n-1} \left(< \frac{1}{243} \xi_{n-2} < \dots < \frac{1}{3^{2n-2}} \xi_2 < \frac{1}{3^{2n-1}} \xi_1 \right)$$

und sorgen weiter durch geeignete Wahl von ε_n dafür, daß für jede Wahl von a_1, a_2, \dots, a_{m_n} das Verhältnis von der zwischen ${}_{n+1} l_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}$ und ${}_{n+1} l_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie

und der zwischen $\int_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}^{} l_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}$ und $\int_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}^{} l_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke derselben Breitelinie zwischen $1 - \eta_n$ und $1 + \eta_n$ liegt.

Die Limestransformation von $\tau_1, \tau_1 \cdot \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3, \dots$ ist eine eindeutige und stetige Transformation τ des Quadrates k in sich, welche das in k liegende Segment von $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_i in einen solchen b_0 und b_1 verbindenden und jede Breitelinie nur in einem Punkte treffenden einfachen Kurvenbogen $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt, daß für jede Wahl von n und den μ_i innerhalb des Streifens $s_{\mu_1 \dots \mu_n}$ zum Innern eines Quadrates $\mu_1 \dots \mu_n q_a$ gehörige, also außerhalb C liegende Punkte dieses Kurvenbogens liegen. Mithin enthält C von keinem Kurvenbogen $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ einen Teilbogen, so daß die zu τ reziproke Transformation die Menge C in eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C' überführt, welche von keiner Längelinie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ ein Segment enthält. Mit anderen Worten, wir haben bewiesen:

Hilfssatz: Sei $PQRS$ ein abgeschlossenes Quadrat, und C eine in diesem Quadrat enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge, zu welcher kein Segment von QR oder PS gehört; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation des Quadrates in sich, welche jede Quadratseite und jeden der Seite PQ parallelen Querschnitt des Quadrates invariant läßt, und C in eine Punktmenge C' überführt, welche kein der Quadratseite QR paralleles gerades Liniensegment enthält.

§ 2. Der Inhalt der abgeschlossenen Punktmengen.

Wir denken wieder im abgeschlossenen Quadrat k mit den Eckpunkten P, Q, R, S (von denen Q im Koordinatenanfangspunkt, P auf der X -Achse und R auf der Y -Achse liegt) eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C , zu welcher kein Segment von QR oder PS gehört und bestimmen nach § 1 eine eindeutige und stetige Transformation τ' von k in sich, welche alle geraden Liniensegmente $y = c$ nebst den Quadratseiten $x = 0$ und $x = 1$ und allen Punkten der Quadratseite $y = 0$ invariant läßt, und C in eine Punktmenge C' überführt, welche kein gerades Liniensegment $x = c$ enthält. Die Entfernung, welche ein willkürlicher Punkt von k von C' besitzt, bezeichnen wir mit ϱ . Alsdann ist ϱ eine sich über k erstreckende stetige, nirgends negative Funktion von x und y , welche in allen Punkten von C' , aber sonst nirgends verschwindet. Wir setzen

$$\begin{aligned} \int_0^y \varrho(xy) dy \\ = \tau'_i(xy). \end{aligned}$$

Die Formeln

$$x' = x$$

$$y' = \eta(xy)$$

definieren eine eindeutige und stetige Transformation τ'' von k in sich, welche C' in eine solche nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C'' überführt, daß der lineare Inhalt der auf einer willkürlichen Geraden $x = c$ liegenden Teilmenge von C'' verschwindet, mithin auch der ebene Inhalt von C'' selbst verschwindet.

Sei t die durch $\tau''^{-1} \cdot \tau'^{-1}$ bestimmte, die Eckpunkte invariant lassende Transformation der Quadratseite QR in sich, M der Mittelpunkt von k , und Q_n bzw. R_n der Schnittpunkt von MQ bzw. MR mit der Geraden $x = 2^{-n-1}$. Durch Projektion aus M bestimmt dann t gleichzeitig eine Transformation des geraden Liniensegmentes $Q_n R_n$ in sich, welche einen willkürlichen Punkt W_n dieses Liniensegmentes in W'_n überführt. Unter ${}_aR_n$ verstehen wir einen solchen Punkt von $Q_n R_n$, daß der Schnittpunkt der geraden Linie $M_a R_n$ mit der Y -Achse eine Ordinate $\frac{a}{2^n}$ besitzt, und betrachten ein Trapezium ${}_aR_{n+1} R_{n+2} R_{n+1} {}_{2a+2}R_{n+1}$. Sei Z die Mitte von ${}_aR_{n+1} R_n$ und U die Mitte von ${}_aR_{n+1} R'_n$, und sei ${}_\alpha\tau_n$ die eindeutige und stetige Transformation, welche das Trapezium ${}_aR_{n+1} R_n {}_aR_{n+1} {}_{2a+2}R_{n+1}$ in solcher Weise in das Trapezium ${}_aR_{n+1} R'_n {}_{2a}R_{n+1}$ ${}_{2a+2}R'_{n+1}$ überführt, daß für jedes α die gerade Linie, welche die Strecken ${}_aR_n {}_{2a}R_{n+1}$ und ${}_{a+1}R_n {}_{2a+2}R_{n+1}$ bzw. die Strecken ${}_aR_n Z$ und ${}_{2a}R_{n+1}$ ${}_{2a+1}R_{n+1}$ bzw. die Strecken $Z {}_{a+1}R_n$ und ${}_{2a+1}R_{n+1} {}_{2a+2}R_{n+1}$ nach dem Verhältnis α zerlegt, in die gerade Linie, welche die Strecken ${}_aR'_{n+1} {}_{2a}R'_{n+1}$ und ${}_{a+1}R'_{n+1} {}_{2a+2}R'_{n+1}$ bzw. die Strecken ${}_aR'_n U$ und ${}_{2a}R'_{n+1} {}_{2a+1}R'_{n+1}$ bzw. die Strecken $U {}_{a+1}R'_n$ und ${}_{2a+1}R'_{n+1} {}_{2a+2}R'_{n+2}$ nach dem Verhältnis α zerlegt, übergeht. Bei Variierung von n und a bestimmen die verschiedenen ${}_\alpha\tau_n$ eine eindeutige und stetige Transformation τ_{QR} der abgeschlossenen Dreiecksfläche MQR in sich, bei welcher die Quadratseite QR der Transformation t unterliegt, und die zur Dreiecksfläche gehörige Teilmenge von C' in eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge vom Inhalt Null übergeht. Wenn wir in analoger Weise τ_{RS} und τ_{PS} definieren, so gelangen wir zu einer eindeutigen und stetigen Transformation τ''' von k in sich, bei welcher der Quadratumfang derselben Transformation wie bei $\tau''^{-1} \cdot \tau'^{-1}$ unterliegt, und C'' in eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C''' vom Inhalt Null übergeht.

Betrachten wir nun die Transformation $\tau' \cdot \tau'' \cdot \tau'''$, so stellt sich folgende Eigenschaft heraus:

Satz 1: Sei $PQRS$ ein abgeschlossenes Quadrat, und C eine in diesem Quadrat enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge, zu welcher

kein Segment von QR oder PS gehört; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation des Quadrates in sich, welche jeden Punkt des Quadratumsfanges invariant läßt und C in eine Punktmenge vom Inhalt Null überführt.

Sei nun C_1 eine völlig willkürliche in k enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge. Dann existiert ein Ordnungstypus $\omega + \omega$ von der Y -Achse parallelen, links gegen QR und rechts gegen PS konvergierenden geraden Querschnitten

$$\dots, K_{-3}L_{-3}, K_{-1}L_{-1}, K_0L_0, K_1L_1, K_2L_2, \dots$$

von k , welche keine zu C_1 gehörige Segmente enthalten.*). Auf Grund von Satz 1 gibt es für jedes ν eine eindeutige und stetige Transformation t_ν des abgeschlossenen Rechteckes $K_\nu L_\nu L_{\nu+1} K_{\nu+1}$ in sich, welche jeden Punkt seines Umganges invariant läßt, und die zu ihm gehörige Teilmenge C'_ν von C_1 in eine Punktmenge C'_1 vom Inhalt Null überführt. Aus der Betrachtung der Vereinigung der verschiedenen Transformationen t_ν ergibt sich sodann folgendes Resultat:

Satz 2: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat und C_1 eine in k enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Quadratumsfanges invariant läßt und C_1 in eine Punktmenge vom Inhalt Null überführt.

Wir nehmen nunmehr an, daß die dem Innern von k angehörige Teilmenge von C_1 nicht-abzählbar ist. Alsdann liegt im Innern von k eine perfekte punkthafte Teilmenge C_2 von C_1 , und kann man im Innern von k eine einfache geschlossene Kurve γ konstruieren, welche C_2 als Bestandteil enthält.**) Sei ε eine beliebige zwischen 0 und 1 liegende positive Zahl, so kann man im Innern von k eine einfache geschlossene „nicht-quadrierbare“ Kurve γ' konstruieren, deren Inhalt $> 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ ist***), und auf γ' eine solche punkthafte perfekte Punktmenge C' bestimmen, daß das Maß der Komplementärmenge von C' auf $\gamma' < \frac{1}{2}\varepsilon$, mithin der Inhalt von $C' > 1 - \varepsilon$ ist. Zwischen C_2 und C' läßt sich eine eindeutige und stetige Beziehung herstellen; diese läßt sich zu einer eindeutigen und stetigen Beziehung zwischen γ und γ' , und letztere sich zu einer eindeutigen und stetigen Beziehung zwischen C_1 und C' .

*) Sei nämlich a_1, a_2, a_3, \dots eine Folge von gegen Null konvergierenden positiven Zahlen. Diejenigen Werte von x , zu denen in C_1 enthaltene, der Y -Achse parallele gerade Liniensegmente $\geq a_x$ gehören, bilden für jedes ν eine nirgends dichte abgeschlossene Menge σ_ν , und die Komplementärmenge von $\Sigma\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ ist überall dicht zwischen 0 und 1.

**) Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre II, S. 258, 259.

***) Ibid. S. 257.

deutigen und stetigen Transformation von k in sich erweitern*), bei welcher jeder Punkt des Quadratumfanges invariant bleibt. D. h. wir haben bewiesen:

Satz 3: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, und C_1 eine in k enthaltene, im Innengebiete von k nicht-abzählbare nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge; es existiert eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Quadratumfanges invariant lässt und C_1 in eine Punktmenge, deren Inhalt dem Werte 1 beliebig nahe kommt, überführt.

Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen wie folgt zusammen:

Theorem 1: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, und C eine in k enthaltene, im Innengebiete von k nicht-abzählbare abgeschlossene Punktmenge; bei den eineindeutigen und stetigen Transformationen von k in sich schwankt der Inhalt der Punktmengen, in welche C übergeht, zwischen 0 (inklusive) und 1 (exklusive), wenn C nirgends dicht ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (exklusive), wenn C weder nirgends dicht noch überall dicht ist.

§ 3. Das Maß der inneren und äußeren Grenzmengen.

Wir denken das abgeschlossene Quadrat k zerlegt in eine überall nicht-abzählbare äußere Grenzmenge C und eine innere Grenzmenge I . Sei $C = \mathfrak{S}(C_1, C_2, C_3, \dots)$, wobei die abgeschlossene Punktmenge C_v für jedes v in der abgeschlossenen Punktmenge C_{v+1} enthalten ist, und sei I_v die Komplementärmenge von C_v in k .

Wir zerlegen k in vier kongruente homothetische Teilquadrate, mit jedem der letzteren nehmen wir die gleiche Zerlegung vor, und fahren in dieser Weise unbeschränkt fort. Alle so entstehende Teilquadrate von k werden wir als Quadrate x bezeichnen. Wir definieren nun eine Fundamentalreihe τ_1, τ_2, \dots von eineindeutigen und stetigen Transformationen von k wie folgt:

Definition von τ_1 . Sei C_{a_1} eine im Innengebiete von k nicht-abzählbare Punktmenge. Auf Grund des Satzes 3 von § 2 definieren wir τ_1 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Umfanges von k invariant lässt und C_{a_1} in eine Punktmenge mit Inhalt $> \frac{1}{2}$ überführt. Die Punktmenge, in welche C_v bzw. I_v durch τ_1 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C'_v bzw. I'_v .

Definition von τ_2 . Wir zerlegen I'_{a_1} in solcher Weise in als x_2 zu bezeichnende Quadrate x , deren Größe bei Konvergenz gegen C'_{a_1} aber auch

* Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre II, S. 209—212. Vgl. auch meine Bemerkung dazu in Math. Ann. 68, S. 427, 428.

nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2}$ ist, durch τ_1 in zwei nicht zum selben x_2 gehörige Punkte übergeführt werden. Sodann wählen wir eine endliche Menge von als x_2' zu bezeichnenden Quadraten x_2 aus, deren Gesamtinhalt mehr als $\frac{3}{4}$ des Maßes von I_{a_1}' beträgt. Sei C_{a_2}' eine im Innengebiete jedes x_2' nicht-abzählbare Punktmenge. Auf Grund des Satzes 3 von § 2 definieren wir τ_2 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt der Umfänge der x_2' und jeden außerhalb der x_2' liegenden Punkt invariant lässt und C_{a_2}' in eine Punktmenge überführt, deren Inhalt innerhalb jedes x_2' mehr als $\frac{2}{3}$ des Inhaltes dieses x_2' beträgt. Die Punktmenge, in welche C_{a_2}' bzw. I_{a_2}' durch τ_2 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C_{a_2}'' bzw. I_{a_2}'' .

Definition von τ_n . Wir zerlegen $I_{a_{n-1}}^{(n-1)}$ in solcher Weise in als x_n zu bezeichnende Quadrate x_n , deren Größe bei Konvergenz gegen $C_{a_{n-1}}^{(n-1)}$ aber auch nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß jedes x_n in einem x_{n-1} enthalten ist und zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2^{n-1}}$ ist, durch $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_{n-1}$ in zwei nicht zum selben x_n gehörige Punkte übergeführt werden. Sodann wählen wir eine endliche Menge von als x_n' zu bezeichnenden Quadraten x_n aus, deren Gesamtinhalt mehr als $\frac{3}{4}$ des Maßes von $I_{a_{n-1}}^{(n-1)}$ beträgt. Sei C_{a_n}' eine im Innengebiete jedes x_n' nicht-abzählbare Punktmenge. Auf Grund des Satzes 3 von § 2 definieren wir τ_n als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt der Umfänge der x_n' und jeden außerhalb der x_n' liegenden Punkt invariant lässt und C_{a_n}' in eine Punktmenge überführt, deren Inhalt innerhalb jedes x_n' mehr als $\frac{2}{3}$ des Inhaltes dieses x_n' beträgt. Die Punktmenge, in welche C_{a_n}' bzw. I_{a_n}' durch τ_n übergeführt wird, bezeichnen wir mit C_{a_n}'' bzw. I_{a_n}'' .

Die Limestransformation von $\tau_1, \tau_1 \cdot \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3, \dots$ ist eine eineindeutige und stetige Transformation τ des Quadrates k in sich, welche C in eine äußere Grenzmenge vom Maß 1 und I in eine innere Grenzmenge vom Maß 0 überführt. Wir formulieren mithin:

Satz 4: *Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, welches in eine überall nicht-abzählbare äußere Grenzmenge C und eine innere Grenzmenge I zerlegt ist; es existiert eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche C in eine Punktmenge vom Maß 1 und I in eine Punktmenge vom Maß 0 überführt.*

Wir denken nunmehr k zerlegt in eine äußere Grenzmenge C und eine überall dichte innere Grenzmenge I . Sei wieder $C = \mathfrak{S}(C_1, C_2, C_3, \dots)$, wobei die abgeschlossene Punktmenge C_r für jedes r in der abgeschlossenen Punktmenge C_{r+1} enthalten ist, so ist jedes C_r nirgends dicht. Sei wieder I_r die Komplementärmenge von C_r in k .

Wir definieren in folgender Weise eine Fundamentalreihe $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ von eineindeutigen und stetigen Transformationen von k :

Definition von τ_1 . Auf Grund des Satzes 2 von § 2 definieren wir τ_1 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Umfanges von k invariant läßt und C_1 in eine Punktmenge vom Inhalt Null überführt. Die Punktmenge, in welche C_r bzw. I_r durch τ_1 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C'_r bzw. I'_r .

Definition von τ_2 . Wir zerlegen I'_1 in solcher Weise in als x_2 zu bezeichnende Quadrate z , deren Größe bei Konvergenz gegen C'_1 aber auch nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2}$ ist, durch τ_1 in zwei nicht zum selben x_2 gehörige Punkte übergeführt werden. Auf Grund des Satzes 2 von § 2 definieren wir τ_2 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt von C'_1 und jeden Punkt der Umfänge der x_2 invariant läßt und C'_2 in eine Punktmenge überführt, welche innerhalb jedes x_2 vom Inhalt Null ist. Die Punktmenge, in welche C'_r bzw. I'_r durch τ_2 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C''_r bzw. I''_r .

Definition von τ_n . Wir zerlegen $I_{n-1}^{(n-1)}$ in solcher Weise in als x_n zu bezeichnende Quadrate z , deren Größe bei Konvergenz gegen $C_{n-1}^{(n-1)}$ aber auch nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß jedes x_n in einem x_{n-1} enthalten ist und zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2^{n-1}}$ ist, durch $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_{n-1}$ in zwei nicht zum selben x_n gehörige Punkte übergeführt werden. Auf Grund des Satzes 2 von § 2 definieren wir τ_n als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt von $C_{n-1}^{(n-1)}$ und jeden Punkt der Umfänge der x_n invariant läßt und $C_n^{(n-1)}$ in eine Punktmenge überführt, welche innerhalb jedes x_n vom Inhalt Null ist. Die Punktmenge, in welche $C_r^{(n-1)}$ bzw. $I_r^{(n-1)}$ durch τ_n übergeführt wird, bezeichnen wir mit $C_r^{(n)}$ bzw. $I_r^{(n)}$.

Die Limestransformation von $\tau_1, \tau_1 \cdot \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3, \dots$ ist eine eineindeutige und stetige Transformation τ des Quadrates k in sich, welche C in eine äußere Grenzmenge vom Maß 0 und I in eine innere Grenzmenge vom Maß 1 überführt. Wir formulieren mithin:

Satz 5: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, welches in eine äußere Grenzmenge C und eine überall dichte innere Grenzmenge I

zerlegt ist; es existiert eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche C in eine Punktmenge vom Maß 0 und I in eine Punktmenge vom Maß 1 überführt.

Das Ergebnis dieses Paragraphen kann wie folgt zusammengefaßt werden:

Theorem 2: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, welches in eine im Innern von k nicht-abzählbare äußere Grenzmenge C und eine im Innern von k nicht-abzählbare innere Grenzmenge I zerlegt ist; bei den eineindeutigen und stetigen Transformationen von k in sich schwankt daß Maß der Punktmengen, in welche I übergeht, zwischen 0 (inklusive) und 1 (inklusive), wenn I überall dicht und C überall nicht-abzählbar ist; zwischen 0 (inklusive) und 1 (exklusive), wenn I nicht überall dicht, aber C überall nicht-abzählbar ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (inklusive), wenn I überall dicht, aber C nicht überall nicht-abzählbar ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (exklusive), wenn weder I überall dicht noch C überall nicht-abzählbar ist.

Gebietsdeterminanten.

Von

LEOPOLD LÖWENHEIM in Berlin-Lichtenberg.

§ 1. Die Auflösung linearer Gleichungen.

Im folgenden setze ich als bekannt voraus meine Abhandlung „Über Transformationen im Gebietekalkül“ im 73. Band dieser Zeitschrift, S. 245 bis 272, die ich kurz mit „Tr.“ zitieren werde. Ich werde mich auch der dort angewandten Bezeichnungen bedienen. Vorliegende Abhandlung ist gewissermaßen die Fortsetzung von jener.

Gegeben sei ein System linearer Gebietsgleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Wir wollen die Eliminationsresultante und die Auflösung nach den x ermitteln.

Aus (1) folgt $a_{\lambda\mu} x_\mu \leq b_\lambda$, also $x_\mu \leq \bar{a}_{\lambda\mu} + b_\lambda$ für beliebige λ , also auch $x_\mu \leq \prod_\lambda (\bar{a}_{\lambda\mu} + b_\lambda)$. Wir können daher setzen

$$(2) \quad x_\mu = \xi_\mu \prod_\lambda (\bar{a}_{\lambda\mu} + b_\lambda) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

wo die ξ_μ noch zu ermitteln sind. Setzt man (2) in (1) ein, so lassen sich diese Gleichungen, da

$$a_{x\mu} \prod_\lambda (\bar{a}_{\lambda\mu} + b_\lambda) = a_{x\mu} b_x \prod_{\lambda \neq x} (\bar{a}_{\lambda\mu} + b_\lambda)$$

ist, auf die Form bringen

$$(3) \quad \begin{cases} b_1 \leq a_{11} \prod_{\lambda=1}^n (\bar{a}_{\lambda 1} + b_\lambda) \xi_1 + a_{12} \prod_{\lambda=2}^n (\bar{a}_{\lambda 2} + b_\lambda) \xi_2 + \cdots + a_{1n} \prod_{\lambda=1}^{n-1} (\bar{a}_{\lambda n} + b_\lambda) \xi_n \\ b_2 \leq a_{21} \prod_{\lambda=2}^n (\bar{a}_{\lambda 1} + b_\lambda) \xi_1 + a_{22} \prod_{\lambda=3}^n (\bar{a}_{\lambda 2} + b_\lambda) \xi_2 + \cdots + a_{2n} \prod_{\lambda=2}^{n-1} (\bar{a}_{\lambda n} + b_\lambda) \xi_n \\ \vdots \\ b_m \leq a_{m1} \prod_{\lambda=m}^n (\bar{a}_{\lambda 1} + b_\lambda) \xi_1 + a_{m2} \prod_{\lambda=m+1}^n (\bar{a}_{\lambda 2} + b_\lambda) \xi_2 + \cdots + a_{mn} \prod_{\lambda=m+1}^{n-1} (\bar{a}_{\lambda n} + b_\lambda) \xi_n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben aber, wenn sie überhaupt lösbar sind, sicher die Partikularlösung $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 1$, (welche die rechten Seiten zu einem Maximum macht). Es folgt:

Satz 1: Notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (1) ist

$$(4) \quad b_x \leq a_{x1} \prod_{\lambda \neq x} (\bar{a}_{\lambda 1} + b_\lambda) + a_{x2} \prod_{\lambda \neq x} (\bar{a}_{\lambda 2} + b_\lambda) + \dots + a_{xn} \prod_{\lambda \neq x} (\bar{a}_{\lambda n} + b_\lambda),$$

$$(x = 1, 2, \dots, m).$$

Das System dieser Gleichungen (4) ist die gesuchte Eliminationsresultante.

Ist nun a_1, a_2, \dots eine Partikularlösung einer Gleichung $F(\xi_1, \xi_2, \dots) = 0$, so lautet die allgemeine reproduktive Lösung, wie ich bewiesen habe (z. B. in Bd. 68 dieser Zeitschrift S. 194, Satz 24a),

$$\xi_\mu = u_\mu F(u_1, u_2, \dots) + u_\mu F(u_1, u_2, \dots),$$

wo die u_λ willkürliche Parameter sind. In unserem Falle, wo $a_\mu = 1$ Partikularlösung von (3) ist, ist also einfach $\xi_\mu = u_\mu + F(u_1, u_2, \dots)$. Nun geben die Gleichungen (3) vereinigt

$$\sum_x b_x \left(\bar{a}_{x1} + \sum_{\lambda \neq x} a_{\lambda 1} \bar{b}_\lambda + \xi_1 \right) \left(\bar{a}_{x2} + \sum_{\lambda \neq x} a_{\lambda 2} \bar{b}_\lambda + \xi_2 \right) \dots \left(\bar{a}_{xn} + \sum_{\lambda \neq x} a_{\lambda n} \bar{b}_\lambda + \xi_n \right) = 0.$$

Die linke Seite entspricht dem $F(\xi_1, \xi_2, \dots)$. Daraus kann man $\xi_\mu = u_\mu + F(u_1, u_2, \dots)$ berechnen, und (2) liefert dann die gesuchte allgemeine reproduktive Lösung, (da nämlich der zu ξ_μ hinzukommende Faktor $\prod_\lambda (\bar{a}_{\lambda \mu} + b_\lambda)$ die Reproduktivität nicht zerstört, wie man leicht zeigen kann):

$$(5) \quad x_\mu = \prod_\nu (\bar{a}_{\nu \mu} + b_\nu) \left[u_\mu + \sum_x b_x \left(\bar{a}_{x1} + \sum_{\lambda \neq x} a_{\lambda 1} \bar{b}_\lambda + \bar{u}_1 \right) \left(\bar{a}_{x2} + \sum_{\lambda \neq x} a_{\lambda 2} \bar{b}_\lambda + \bar{u}_2 \right) \dots \left(\bar{a}_{xn} + \sum_{\lambda \neq x} a_{\lambda n} \bar{b}_\lambda + \bar{u}_n \right) \right].$$

Z. B. hat die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ die Eliminationsresultante $b \in a_1 + a_2 + \dots + a_n$ und die allgemeine reproduktive Lösung

$$x_\mu = (\bar{a}_\mu + b) [u_\mu + b(\bar{a}_1 + \bar{u}_1)(\bar{a}_2 + \bar{u}_2) \dots (\bar{a}_n + \bar{u}_n)].$$

Wir wollen nun im Folgenden disjunkte Gebiete (und nicht nur wie in „Tr.“ disjunktive Gebiete) stets durch obere Indizes kennzeichnen, so daß also z. B. u^1, u^2, \dots disjunkt sein sollen.

Sind nun in (1) die b_x disjunkt, etwa gleich b^1, b^2, \dots, b^m , so wird aus (1)

$$(6) \quad a_{x1} x_1 + a_{x2} x_2 + \dots + a_{xn} x_n = b^x \quad (x = 1, 2, \dots, m).$$

Setzt man noch

$$(7) \quad a_\mu^i = a_{\lambda\mu} \prod_{x+\lambda} \bar{a}_{x\mu},$$

was in der ganzen Abhandlung gelten soll, so folgt aus Satz 1:

Satz 2: Die Lösbarkeitsbedingung von (6) ist

$$(8) \quad b^x \in a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x \quad (x = 1, 2, \dots, m).$$

Ferner ist leicht zu sehen:

Satz 3: Das System (6) ist, wenn überhaupt lösbar, stets durch disjunkte x_i lösbar, z. B. durch

$$(9) \quad x_1 = \sum_x a_1^x b^x, \quad x_2 = \sum_x \bar{a}_1^x a_2^x b^x, \quad x_3 = \sum_x \bar{a}_1^x \bar{a}_2^x a_3^x b^x, \dots, \quad x_n = \sum_x \bar{a}_1^x \bar{a}_2^x \dots \bar{a}_{n-1}^x a_n^x b^x.$$

Satz 4: Sind in (6) die b^x disjunktiv, so ist (6), wenn überhaupt lösbar, stets durch disjunkte x_i lösbar. Die allgemeine reproduktive disjunkte Lösung läßt sich nämlich in der Form geben

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 = \sum_x b^x a_1^x (u^1 + \bar{a}_2^x u^2 + \bar{a}_3^x u^3 + \cdots + \bar{a}_n^x \bar{a}_n^x \cdots \bar{a}_n^x u^n), \\ x_2 = \sum_x b^x a_2^x (u^2 + \bar{a}_3^x u^3 + \bar{a}_4^x u^4 + \cdots + \bar{a}_n^x \bar{a}_n^x \cdots \bar{a}_n^x u^n + \bar{a}_3^x \bar{a}_4^x \cdots \bar{a}_n^x \bar{a}_1^x u^1) \\ \vdots \\ x_n = \sum_x b^x a_n^x (u^n + \bar{a}_1^x u^1 + \bar{a}_2^x \bar{a}_3^x u^2 + \cdots + \bar{a}_1^x \bar{a}_2^x \cdots \bar{a}_{n-1}^x u^{n-1}), \end{cases}$$

wie man leicht verifizieren kann.

Satz 5: Jede Lösung von (6) befriedigt auch die Gleichungen

$$(11) \quad a_1^x x_1 + a_2^x x_2 + \cdots + a_n^x x_n = b^x \quad (x = 1, 2, \dots, m),$$

denn befriedigen die x_μ die Gleichungen (6), so ist $a_{x\mu} x_\mu \in b^x$, $a_{\lambda\mu} x_\mu \in b^x$ oder multipliziert $a_{x\mu} a_{\lambda\mu} x_\mu = 0$ für $x + \lambda$, also $a_{x\mu} x_\mu = a_{x\mu} \bar{a}_{\lambda\mu} x_\mu$ für $x + \lambda$, also auch $a_{x\mu} x_\mu = a_{x\mu} \prod_{\lambda \neq x} \bar{a}_{\lambda\mu} x_\mu = a_\mu^x x_\mu$ wegen (7), wodurch (6) in (11) übergeht.

Eine Lösung von (11) ist aber nicht immer eine von (6), wohl aber ist (11) lösbar, wenn (6) lösbar ist, da ja die Lösbarkeitsbedingung (8) für (6) und (11) übereinstimmt.

§ 2. Funktionaldeterminanten.

Im folgenden handelt es sich für uns lediglich um die Bedingung dafür, daß (1) für beliebige Werte der b_x lösbar ist. (6) ist dann für beliebige Werte der b^x lösbar. Wir setzen (vgl. (7))

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \prod_s (a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s)$$

und bezeichnen diesen Ausdruck als die „Determinante“ des Gleichungssystems (1) oder auch als die Determinante der linearen Funktionen in (1) oder auch als die Determinante der Matrix der a_{xi} . Nach Satz 2, ist das Gleichungssystem (1) dann und nur dann für beliebige b_x lösbar, wenn die Determinante der a_{xi} gleich 1 ist, d. h.

Satz 6: Ein System linearer Funktionen kann dann und nur dann beliebige Wertsysteme annehmen, wenn die aus den Koeffizienten gebildete Determinante gleich 1 ist.

Aus (12), (7) folgt

$$(13) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{vmatrix} \quad \text{und hieraus}$$

Satz 7: Gleichungssystem (1) ist *ungleich mit*

$$(14) \quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = b_1, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n = b_m \end{cases}$$

für beliebige b_x lösbar.

Eine Matrix, deren Spaltenelemente disjunkt sind, wollen wir ein „Disjunkt“, nennen.

Wir können nun auch von der Determinante eines nicht linearen Funktionensystems reden. Haben wir z. B. zwei Funktionen mit drei Veränderlichen x, y, z , etwa

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) \equiv [c_1, c_2, \dots, c_s]_{xyz}, \\ \psi(x, y, z) \equiv [d_1, d_2, \dots, d_s]_{xyz}, \end{cases}$$

so können wir nach der Bedingung dafür fragen, daß φ und ψ alle beliebigen Wertepaare p, q annehmen können. Nun sind, wie ich in „Tr.“ gezeigt habe, die Gleichungen

$$(16) \quad \varphi(x, y, z) = p, \quad \psi(x, y, z) = q$$

äquivalent dem Systeme

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi\psi = [c_1 d_1, c_2 d_2, \dots, c_8 d_8]_{xyz} = p q, \\ \varphi\bar{\psi} = [c_1 \bar{d}_1, c_2 \bar{d}_2, \dots, c_8 \bar{d}_8]_{xyz} = p \bar{q}, \\ \bar{\varphi}\psi = [\bar{c}_1 d_1, \bar{c}_2 d_2, \dots, \bar{c}_8 d_8]_{xyz} = \bar{p} q, \\ \bar{\varphi}\bar{\psi} = [\bar{c}_1 \bar{d}_1, \bar{c}_2 \bar{d}_2, \dots, \bar{c}_8 \bar{d}_8]_{xyz} = \bar{p} \bar{q}, \end{cases}$$

und (16) ist dann und nur dann für beliebige p, q lösbar, wenn das System

$$(18) \quad \begin{cases} c_1 d_1 x_1 + c_2 d_2 x_2 + \dots + c_8 d_8 x_8 = r^1, \\ c_1 \bar{d}_1 x_1 + c_2 \bar{d}_2 x_2 + \dots + c_8 \bar{d}_8 x_8 = r^2, \\ \bar{c}_1 d_1 x_1 + \bar{c}_2 d_2 x_2 + \dots + \bar{c}_8 d_8 x_8 = r^3, \\ \bar{c}_1 \bar{d}_1 x_1 + \bar{c}_2 \bar{d}_2 x_2 + \dots + \bar{c}_8 \bar{d}_8 x_8 = r^4 \end{cases}$$

für beliebige disjunkte Werte der r^1, r^2, r^3, r^4 durch *disjunkte* x_1, x_2, \dots, x_8 lösbar ist. Dazu genügt aber noch Satz 4, daß (18) durch irgendwelche (nicht notwendig disjunkte) x_1, x_2, \dots, x_8 lösbar ist. Die Bedingung hierfür ist nach Satz 6 (in Übereinstimmung mit Satz 18 von „Tr.“)

$$(19) \quad \begin{array}{|c c c c|} \hline & c_1 d_1 & c_2 d_2 & \cdots & c_8 d_8 \\ \hline & c_1 \bar{d}_1 & c_2 \bar{d}_2 & \cdots & c_8 \bar{d}_8 \\ \hline & \bar{c}_1 d_1 & \bar{c}_2 d_2 & \cdots & \bar{c}_8 d_8 \\ \hline & \bar{c}_1 \bar{d}_1 & \bar{c}_2 \bar{d}_2 & \cdots & \bar{c}_8 \bar{d}_8 \\ \hline \end{array} = 1 \quad \text{oder}$$

$$(19) \quad \begin{array}{|c c c c|} \hline \varphi(1,1,1)\psi(1,1,1) & \varphi(1,1,0)\psi(1,1,0) & \varphi(1,0,1)\psi(1,0,1) & \cdots \varphi(0,0,0)\psi(0,0,0) \\ \hline \varphi(1,1,1)\psi(1,1,1) & \varphi(1,1,0)\overline{\psi(1,1,0)} & \varphi(1,0,1)\overline{\psi(1,0,1)} & \cdots \varphi(0,0,0)\overline{\psi(0,0,0)} \\ \hline \varphi(1,1,1)\psi(1,1,1) & \varphi(1,1,0)\psi(1,1,0) & \varphi(1,0,1)\psi(1,0,1) & \cdots \varphi(0,0,0)\psi(0,0,0) \\ \hline \varphi(1,1,1)\psi(1,1,1) & \varphi(1,1,0)\overline{\psi(1,1,0)} & \varphi(1,0,1)\overline{\psi(1,0,1)} & \cdots \varphi(0,0,0)\overline{\psi(0,0,0)} \\ \hline \end{array} = 1.$$

Diese Determinante heiße die „*Funktionaldeterminante*“ von φ und ψ und die Matrix ihrer Elemente heiße das „*Funktionaldisjunktiv*“ von φ und ψ . Dann gilt also

Satz 8: Ein System von Funktionen kann dann und nur dann beliebige Wertesysteme annehmen, wenn seine Funktionaldeterminante gleich 1 ist.

Die Funktionaldeterminante von φ allein ist $(c_1 + c_2 + \dots + c_8)$ ($\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_8$), in Übereinstimmung mit dem „Zwischenwertsatz“, nach welchem φ zwischen den Werten $c_1 c_2 \dots c_8$ und $\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_8$ liegt, also genau dann beliebige Werte annehmen kann, wenn erstere $= 0$, letztere $= 1$ ist, also $\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_8 = 1$ und $c_1 + c_2 + \dots + c_8 = 1$, d. h. $(c_1 + c_2 + \dots + c_8)(\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_8) = 1$. Die Funktionaldeterminante von $a\bar{x} + b\bar{x}$ ist $(a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = a\bar{b} + \bar{a}b$.

Satz 9: Eine oder mehrere Funktionen genügen dann und nur dann einer nicht identischen Gleichung, in der die Argumente der Funktionen explizite nicht vorkommen, wenn ihre Funktionaldeterminante $\neq 1$ ist.

Es besteht nämlich z. B. zwischen φ und ψ die Gleichung

$$(20) \quad \left[\sum_x e_x d_x, \sum_x e_x \bar{d}_x, \sum_x \bar{e}_x d_x, \sum_x \bar{e}_x \bar{d}_x \right]_{\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)} = 1$$

für beliebige x, y, z , wie man leicht mit dem Verifikationssatz bestätigt, und diese Gleichung ist nur dann identisch in bezug auf φ und ψ , wenn die vier Koeffizienten in der eckigen Klammer einzeln $= 1$ sind, also auch ihr Produkt, d. h. nach (19') und (12) die Funktionaldeterminante. Ist diese dagegen $\neq 1$, so ist (20) eine nicht identische Beziehung zwischen φ und ψ .

Besteht umgekehrt eine nicht identische Beziehung zwischen φ und ψ , so läßt sie sich bekanntlich nach dem Entwicklungssatz auf die Form bringen

$$[r, s, t, u]_{\varphi\psi} = 0,$$

wo r oder s oder t oder $u \neq 0$. Ist z. B. $s \neq 0$, so gestattet obige Gleichung, da aus ihr $s\varphi\psi = 0$ folgt, z. B. nicht die Werte $\varphi = 1, \psi = 0$, also können φ und ψ nicht beliebige Werte annehmen, ihre Funktionaldeterminante ist also $\neq 1$. Das gleiche gilt, falls r oder t oder $u \neq 0$ ist. Die Verallgemeinerung für mehr Funktionen und Veränderliche bietet keine Schwierigkeiten.

Das Funktionaldisjunktiv von m Funktionen mit n Veränderlichen hat 2^m Zeilen und 2^n Spalten. Das Funktionaldisjunktiv linearer Funktionen stimmt also nicht mit der Matrix ihrer Koeffizienten überein, wohl aber gilt

Satz 10: *Die Funktionaldeterminante linearer Funktionen ist gleich der aus ihren Koeffizienten gebildeten Determinante.*

Das folgt aus dem Verifikationssatz, denn denkt man sich für die Koeffizienten Modularwerte eingesetzt, so ist nach Satz 6 für diese die Determinante der Koeffizienten $= 1$ oder 0 , je nachdem die so spezialisierten Funktionen beliebige Werte annehmen können oder nicht, d. h. je nachdem die Funktionaldeterminante $= 1$ oder 0 ist.

Wie wir sehen werden, zeigen die quadratischen Gebietsdeterminanten eine weitgehende Ähnlichkeit mit den Determinanten der Algebra. Das hängt offenbar damit zusammen, daß von beiden die Auflösbarkeit linearer Gleichungssysteme abhängt. Ein wesentlicher Unterschied scheint es freilich auf den ersten Blick zu sein, daß im Gebieteckalkul die Determinante $= 1$ sein muß, während sie in der Algebra nur $\neq 0$ zu sein braucht. Indessen ist der Unterschied nicht schwerwiegend. Man kann nämlich zu folge des Verifikationssatzes den ganzen Gebieteckalkul ohne wesentliche Einbuße auf den Zweigebieteckalkul beschränken, da ja eine Formel des Gebieteckalkuls genau dann gilt, wenn sie für die Werte $0, 1$ der vorkommenden Gebiete gilt. Im Zweigebieteckalkul aber ist es gleich-

gültig, ob ich sage, eine Determinante ist = 1, oder ob ich sage, sie ist + 0.

Die Analogie unserer Funktionaldeterminante mit derjenigen in der gewöhnlichen Algebra tritt noch deutlicher hervor, wenn man bedenkt, daß im Gebieteckalkul $\varphi(1)$ als die Ableitung von $\varphi(x)$ nach x und $\varphi(0)$ als die Ableitung von $\varphi(x)$ nach \bar{x} bezeichnet werden kann, da diese Ausdrücke in mancher Hinsicht im Gebieteckalkul dieselbe Rolle spielen wie die Ableitungen in der Arithmetik.

§ 3. Elementare Determinantensätze.

Um beim Beweise von Determinantensätzen den Verifikationssatz anwenden zu können, braucht man folgende Sätze:

Satz 11: Die Determinante eines Elementars ist = 1 oder = 0, je nachdem jede Zeile desselben eine 1 enthält oder nicht. Dies folgt sofort aus (12) und der Definition des Elementars.

Im Modular ist nach (7) dann und nur dann $a_{\kappa i}^* = 1$, wenn $a_{\kappa i}$ das einzige Element seiner Spalte ist, das = 1 ist. Hieraus und aus (13) und Satz 11 folgt:

Satz 12: Die Determinante eines Modulars ist dann und nur dann = 1, wenn in jeder Zeile ein solches Element vorkommt, welches = 1 ist, während sonst in der Spalte dieses Elementes lauter Nullen stehen.

Man kann dies auch so ausdrücken:

Satz 12a: Die Determinante eines Modulars m^{er} Ordnung ist dann und nur dann = 1, wenn m seiner Spalten ein Grundelementar bilden.

Hieraus folgt mit Hilfe des Verifikationssatzes:

Satz 13: Die Determinante einer quadratischen Matrix ist dann und nur dann = 1, wenn die Matrix ein Grunddisjunktiv ist.

Daher haben solche n Funktionen mit n Veränderlichen, welche beliebige Wertsysteme annehmen können, deren Funktionaldeterminante also = 1 ist, als Funktionaldisjunktiv ein Grunddisjunktiv. Nun war aber das Funktionaldisjunktiv nichts anderes als die Matrix der Disjunktivtransformation, welche der aus den gegebenen Funktionen gebildeten Transformation zugeordnet ist. Da diese Matrix also ein Grunddisjunktiv ist, so bilden die Funktionen nach „Tr.“ Satz 22 eine Substitution (= eindeutig umkehrbare Transformation). Nennen wir daher eine Transformation „quadratisch“, wenn sie ebensoviele Funktionen wie Veränderliche enthält, so gilt

Satz 14: Eine quadratische Transformation, deren Funktionen beliebige Wertsysteme annehmen können, ist eine Substitution.

Durch Ausmultiplizieren von (12) folgt

$$(21) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_m} a_{x_1}^1 a_{x_2}^2 \cdots a_{x_m}^m = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m \\ k_p \neq k_r \text{ für } p \neq r}} a_{k_1}^1 a_{k_2}^2 \cdots a_{k_m}^m.$$

Daher gilt, weil im Disjunkt $a_{x_i}^* = a_{x_i}$ ist,

Satz 15: Die Determinante eines Disjunkts ist homogen und linear in bezug auf die Elemente jeder Spalte.

Aus (21) folgt insbesondere

$$(22) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_n \end{vmatrix} = \sum_{x \neq i} (a_x \bar{a}_i \bar{b}_x b_i + a_x a_i \bar{b}_x \bar{b}_i).$$

Mit (7), (12), (21), Satz 11 und 12 ist es nicht schwer, irgendwelche Determinantensätze zu verifizieren. Ich führe zunächst die folgenden Sätze an:

Satz 16: Vertauschung von Zeilen oder von Spalten ändert nicht den Wert einer Determinante.

Satz 17: Eine quadratische Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man die Zeilen als Spalten und die Spalten als Zeilen schreibt.

Satz 18: Eine Determinante verschwindet, wenn die Zeilenzahl größer ist als die Spaltenszahl.

Satz 19: Eine Determinante mit m Zeilen und n Spalten verschwindet, wenn 2 Zeilen oder $n - m + 2$ Spalten einander gleich sind. Bei quadratischen Determinanten genügen also 2 Spalten.

Als Gegenstück zu (22) sei noch erwähnt:

$$(23) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{ für } n > 2.$$

§ 4. Unterdeterminanten.

Es sei (vgl. (13))

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Die Matrizen der a_{xi} bzw. der a_i^* bezeichnen wir mit (a_{xi}) bzw. (a_i^*) . Wir setzen ferner

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \beta_1} & a_{\alpha_1 \beta_2} & \cdots & a_{\alpha_1 \beta_q} \\ a_{\alpha_2 \beta_1} & a_{\alpha_2 \beta_2} & \cdots & a_{\alpha_2 \beta_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\alpha_p \beta_1} & a_{\alpha_p \beta_2} & \cdots & a_{\alpha_p \beta_q} \end{vmatrix},$$

$$a_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)} = \begin{vmatrix} a_{\beta_1}^{\alpha_1} & a_{\beta_2}^{\alpha_2} & \cdots & a_{\beta_q}^{\alpha_p} \\ a_{\beta_1}^{\alpha_1} & a_{\beta_2}^{\alpha_2} & \cdots & a_{\beta_q}^{\alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\beta_1}^{\alpha_p} & a_{\beta_2}^{\alpha_p} & \cdots & a_{\beta_q}^{\alpha_p} \end{vmatrix}$$

Die Klammer um $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p$ soll verhüten, daß man sich die durch Änderung der α_x entstehenden Determinanten als disjunkt vorstellt.

Ferner verstehen wir unter $A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}$ bzw. $A_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)}$ die zu $a_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}$ bzw. $a_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)}$ komplementären Unterdeterminanten, d. h. die Determinanten der Matrizen, welche aus $(a_{\alpha \beta})$ bzw. $(a_{\beta \alpha})$ durch Weglassung der $\alpha_1^{\text{ten}}, \alpha_2^{\text{ten}}, \dots, \alpha_p^{\text{ten}}$ Zeile und der $\beta_1^{\text{ten}}, \beta_2^{\text{ten}}, \dots, \beta_q^{\text{ten}}$ Spalte entstehen. Ist $q = 0$, so ist keine Zeile wegzulassen und es entstehen die Unterdeterminanten $A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}$ bzw. $A^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)}$. Ist $p = 0$, so ist keine Spalte wegzulassen, und es entsteht $A_{|\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q|}$.

Die oberen Klammern können wegbleiben, wenn die Spaltenzahl der betreffenden Unterdeterminante nicht größer ist als die Zeilenzahl, denn dann sind solche Unterdeterminanten, welche sich nur durch die oberen Indizes unterscheiden, wirklich disjunkt. Man verifiziert nämlich leicht:

Satz 20: Ist $p \geq q$, so ist $a_{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} \cdot a_{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_q}^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_p} = 0$, außer wenn die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ mit den $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ übereinstimmen. Für $p > q$ folgt dies übrigens schon aus Satz 18.

Ferner gelten folgende Formeln:

$$(24) \quad a_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)} \leqslant A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q},$$

also auch $A_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)} \leqslant A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}$

$$(25) \quad A \leqslant A^{(\alpha)} \leqslant A^{(\alpha \beta)} \leqslant \dots,$$

also erst recht $A \leqslant A_{\alpha} \leqslant A_{\alpha \beta} \leqslant \dots$

$$(26) \quad A = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \text{ für } n-1 \geq m, \quad A = \sum_{\alpha \beta} A_{\alpha \beta} \text{ für } n-2 \geq m, \dots,$$

folglich $\dots A_{\alpha \beta} \leqslant A_{\alpha} \leqslant A$ für beliebige m, n .

$$(27) \quad A \cdot a_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_p} \leqslant A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_p}.$$

Ist also $A = 1$, so ist $a_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_p} \leqslant A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p | \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_p}$. Daraus folgt:

Satz 21: In der Determinante eines Grunddisjunktivs ist jede Unterdeterminante gleich ihrer komplementären.

Dem Laplaceschen Determinantensatz in der Algebra entspricht

$$(28) \quad A = \sum_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q} a_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)} A_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p)} \text{ für } p \leq q, m-p \leq n-q,$$

also wegen (24)

$$A \in \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q} \text{ für } p \leq q, m - p \leq n - q,$$

und nach Satz 17

$$(29) \quad \begin{cases} A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)} A_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)} & \text{für } m = n, \\ A \in \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_p A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \beta_1 \beta_2 \dots \beta_p} & \text{für } m = n. \end{cases}$$

§ 5. Die Zusammensetzung von Transformationen und die Multiplikationssätze.

Gegeben seien zwei lineare Transformationen

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1m} y_m, \\ x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2m} y_m, \\ \vdots \\ x_l = a_{l1} y_1 + a_{l2} y_2 + \dots + a_{lm} y_m, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} y_1 = b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + \dots + b_{1n} z_n, \\ y_2 = b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + \dots + b_{2n} z_n, \\ \vdots \\ y_m = b_{m1} z_1 + b_{m2} z_2 + \dots + b_{mn} z_n \end{cases}$$

mit den Matrizen a, b . Dieselben lassen sich zusammensetzen zu einer Transformation

$$(C) \quad \begin{cases} x_1 = c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + \dots + c_{1n} z_n, \\ x_2 = c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + \dots + c_{2n} z_n, \\ \vdots \\ x_l = c_{l1} z_1 + c_{l2} z_2 + \dots + c_{ln} z_n \end{cases}$$

mit der Matrix c , wo

$$(30) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n).$$

Wir wollen stets, wenn (30) gilt, c das „relative Produkt“ von a und b nennen und

$$(31) \quad c = a; b$$

setzen (was in „Tr.“ nur für $l = n$ festgesetzt war). Die Determinante einer Matrix a wollen wir mit $|a|$ bezeichnen.

Aus den Auseinandersetzungen in „Tr.“ S. 258 und der Definition der Funktionaldisjunktive entnimmt man (auch für nicht lineare Transformationen)

Satz 22: Sind a und b die Funktionaldisjunktive zusammensetzbare Transformationen, so ist $a;b$ das Funktionaldisjunktiv der aus beiden zusammengesetzten Transformation.

Ist $|a| = b - 1$, so können die Funktionen in (A) und die in (B) beliebige Wertästeeme annehmen, also können es auch die Funktionen in (C), folglich ist $|c| = 1$, also nach dem Verifikationssatz

$$(32) \quad |a| \cdot |b| \leq |a;b|.$$

Unter der zu a „konversen“ Matrix \tilde{a} verstehen wir im Anschluß an Schröder die Matrix, welche entsteht, wenn man die Zeilen von a als Spalten schreibt und die Spalten von a als Zeilen, sodaß also $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. Dann ist, wenn l, m, n dieselbe Bedeutung haben wie oben,

$$(33) \quad |a;b| = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}^{(1 2 \dots l)} \tilde{b}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l)} \quad \text{für } m \geq l, n \geq l,$$

insbesondere

$$(34) \quad |a;b| = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}^{(1 2 \dots l)} \tilde{b}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}^{(1 2 \dots l)} \quad \text{für } m \geq l, n = l,$$

was dem *erweiterten Multiplikationssatz* der Algebra entspricht.

Von den Folgerungen, die man aus (33), (34) mit Hilfe von (24) ziehen kann, verdienen besondere Erwähnung

$$(35) \quad |a;b| \leq |a|,$$

$$(36) \quad |a;b| \leq |\tilde{b}| \quad \text{für } n = l,$$

woraus $|a;b| \leq |a||\tilde{b}|$ für $n = l$ folgt. Nach Satz 17 ist $\tilde{b} = b$ für ein quadratisches b , also wegen (32) (oder auch direkt aus (34))

$$(37) \quad |a;b| = |a||b| \quad \text{für quadratische Matrizen.}$$

Der *einfache Multiplikationssatz* der Algebra gilt also auch im Gebietekalkül. Er läßt sich auch auf mehrere Faktoren übertragen. Hieraus folgt nach Satz 22 und 14 der schon früher*) von mir erwähnte

Satz 23: Zwei oder mehrere quadratische Transformationen gleicher Ordnung sind Substitutionen, falls die aus ihnen zusammengesetzte Transformation eine Substitution ist.

Ich hatte a. a. O. das Wort „quadratisch“ als selbstverständlich weggelassen und möchte doch nicht unterlassen zu zeigen, daß diese Einschränkung notwendig ist. Man kann nämlich aus den beiden Transformationen

$$(D) \quad x_1 = y_1 y_2,$$

$$(E) \quad y_1 = z_1, \quad y_2 = z_1,$$

*) Vgl. Löwenheim, Potenzen im Relativkalkül und Potenzen allgemeiner endlicher Transformationen. Sitzgaber. d. Berl. Math. Ges. XII, 3, S. 71.

die ja keine Substitutionen sind, die identische Substitution

$$(F) \quad x_1 = x_1 \quad \text{zusammensetzen.}$$

Aus der Formel (35) folgt

Satz 24: Können die Funktionen der aus den Transformationen P und Q zusammengesetzten Transformation beliebige Wertesysteme annehmen, so können es auch die Funktionen von P .

Ich habe a. a. O. S. 70—71 durch ein Beispiel einleuchtend gemacht, (was ich schon in „Tr.“ S. 267—268 erwähnt habe), daß derartige Sätze über Gebietstransformationen wie z. B. die beiden letzten eine weit über den Gebietekalkül hinausreichende Tragweite besitzen. Unter einer „Transformation“ wollen wir jetzt ein System von Funktionen im weitesten Sinne des Wortes verstehen. Die Argumente können beliebige Dinge sein, die Funktionswerte gleichfalls, und die Funktionen können für irgendwelche Argumentsysteme auch undeutig oder mehrdeutig sein. Jeder solchen Transformation habe ich ein Modular zugeordnet. Wie haben wir uns nun eine Transformation vorzustellen, wenn die Determinante dieses Modulars = 1 ist? Zur Beantwortung dieser Frage empfiehlt es sich, die a. a. O. angestellte Betrachtung etwas allgemeiner zu fassen und auf die dort angegebene Ergänzung zu einem quadratischen Modular zu verzichten.

Als Argumente für die Funktionen der Transformation mögen lediglich Elemente einer gewissen Menge, des „Argumentbereichs“ in Betracht kommen. Diese Elemente will ich „Elemente 1. Art“ nennen. Als Funktionswerte mögen lediglich Elemente einer gewissen anderen oder auch derselben Menge, des „Funktionsbereichs“, in Betracht kommen. Diese Elemente mögen „Elemente 2. Art“ heißen. Nehmen wir ein Beispiel: Der Argumentbereich bestehe aus den Zahlen 7, 8, 9, der Funktionsbereich aus den Zahlen 5, 6 und die Transformation aus drei Funktionen mit zwei Veränderlichen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$. Als „Elemente 3. Art“ wollen wir nun die Systeme von Argumenten bezeichnen, welche man in die Funktionen einsetzen kann. In unserem Beispiel hätten wir also neun Elemente 3. Art, nämlich die 9 Paare $(7, 7)$, $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(8, 7)$, $(8, 8)$, $(8, 9)$, $(9, 7)$, $(9, 8)$, $(9, 9)$. „Elemente 4. Art“ sollen die in Betracht kommenden Systeme von Funktionswerten heißen, also in unserem Beispiel die acht Tripel $(5, 5, 5)$, $(5, 5, 6)$, $(5, 6, 5)$, $(5, 6, 6)$, $(6, 5, 5)$, $(6, 5, 6)$, $(6, 6, 5)$, $(6, 6, 6)$. Die Transformation ordnet nun, wenn sie eindeutig ist, jedem Element 3. Art genau ein Element 4. Art zu; andernfalls wird sie einigen Elementen 3. Art gar kein Element oder mehrere Elemente 4. Art zuordnen.

Sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Elemente 3. Art und $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ die Elemente 4. Art, so kann man ein Modular a bilden mit m Zeilen und n Spalten, indem man a_{ij} gleich 1 oder 0 setzt, je nachdem die Transformation dem α_i das β_j zuordnet oder nicht. Dies Modular wollen wir

das „*Transformationsmodular*“ nennen und seine Determinante die *Transformationsdeterminante*. Dann gilt, wie man leicht sieht,

Satz 25. *Das Transformationsmodular der zusammengesetzten Transformation AB ist das relative Produkt aus den Transformationsmodularen von A und B.*

Nehmen wir nun noch ein einfacheres Beispiel, wo wieder 7, 8, 9 die Elemente 1. Art und 5, 6 die Elemente 2. Art sind und die Transformation nur die eine Funktion $\varphi(x, y)$ enthält, und zwar sei

$\varphi(x, y) = \text{kleinster oberhalb } 4 \text{ gelegener Rest mod. 2 von einer in } x + y + 20 \text{ aufgehenden zusammengesetzten Zahl.}$

Die Elemente 3. Art sind die Paare $(7, 7), (7, 8), \dots, (9, 9)$, die Elemente 4. Art einfach die Zahlen 5 und 6.

$\varphi(7, 7) = 6$, denn in $7 + 7 + 20$ geht von zusammengesetzten Zahlen nur 34 auf mit dem Rest 6 mod. 2.

$\varphi(7, 8) = 5$.

$\varphi(7, 9)$ ist zweideutig und hat die beiden Werte 5 und 6, denn in $7 + 9 + 20$ gehen 4, 6, 9, 12, 18 auf mit den Resten 6, 6, 5, 6, 6 mod. 2.

$\varphi(8, 9)$ z. B. ist undeutig, denn es gibt keine in $8 + 9 + 20$ aufgehende zusammengesetzte Zahl.

So entsteht das Transformationsmodular von φ :

		(7, 7)	(7, 8)	(7, 9)	(8, 7)	(8, 8)	(8, 9)	(9, 7)	(9, 8)	(9, 9)
5		0	1	1	1	1	0	1	0	0
6		1	0	1	0	1	0	1	0	1

Seine Determinante ist = 1. Welche Eigenschaft von φ bedeutet das? Es bedeutet, daß es Argumentwerte gibt, für die φ nur den Wert 5 hat, und auch solche, für die φ nur den Wert 6 hat. Allgemein:

Satz 26: *Eine Transformationsdeterminante ist dann und nur dann = 1, wenn es zu jedem beliebigen für die Funktionen vorgeschriebenen System von Werten des Funktionsbereichs wenigstens ein System von Werten des Argumentsbereichs gibt, für das die Funktionen die vorgeschriebenen Werte annehmen und keine anderen außerdem.*

Oder kurz ausgedrückt: Die Transformationsdeterminante ist = 1, wenn die Funktionen ein beliebig vorgeschriebenes System von Werten des Funktionsbereichs ausschließlich annehmen können.

Ausdrücklich aber bemerke ich, daß diese Eigenschaft verloren geht, wenn man den Funktionsbereich erweitert, wenn man ihn z. B., wie in „Tr.“, mit einem von ihm verschiedenen Argumentbereich zu einem einzigen Bereich verschmilzt. Man kann streng genommen nur reden von

der Transformationsdeterminante in bezug auf einen gewissen Funktionsbereich. Doch wird man bei Anwendungen diesen Zusatz meist als selbstverständlich weglassen können, denn in der Arithmetik z. B. denkt der Leser ganz von selbst nicht an andere Funktionswerte als an Zahlen.

Aus Satz 24 folgt nun, daß Funktionen einer zusammengesetzten Transformation nur dann beliebige Werte ihres Funktionsbereichs ausschließlich annehmen können, wenn die Funktionen des ersten Kompositionsfaktors beliebige Wertesysteme ihres Funktionsbereichs ausschließlich annehmen können.

Am Schluß möchte ich noch einige Druckfehler und Versehenen berichtigen, welche ich in der Abhandlung „Tr.“ nachträglich bemerkt habe:

S. 254 Zeile 11 muß stehen	(x_i^x)	statt	(x_i^y)
„ 254 „ 13 „ „	Zeile	„	Spalte
„ 254 „ 19 „ „	$u^x v^i + v^x w^k + w^x u^k$ „	$u^x v^x + v^x w^x + w^x u^x$	
„ 259 „ 12 „ „	$y^x \in$	„	$y^x =$
„ 262 „ 31 „ „	$(x = 1, 2, \dots, P)$	„	$(\lambda = 1, 2, \dots, N)$
„ 263 „ 12 „ „	a_i^x	„	x_i^x

Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten.

Von

FRITZ CARLSON in Upsala.

1. Ich beweise im folgenden:

Satz A. Es sei

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ≥ 1 , die regulär ist in jedem Punkt des Bogens*)

$$x = e^{iq}, \quad |q| \geq \frac{\pi}{k}$$

(die Endpunkte inbegriffen) und $\varepsilon(n)$ eine beliebige mit $1:n$ gegen Null konvergierende Funktion. Wenn, für jedes n , $n(1-\varepsilon(n))$ der n ersten Koeffizienten nur eine Anzahl $\leq k$ verschiedener Werte annehmen, die für jedes n dieselben sein sollen, so muß

$$(2) \quad f(x) = \frac{c}{1-x} + g(x),$$

wo c eine Konstante ist und $g(x)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius > 1 .

Satz B. Es sei (1) eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ≥ 1 , die nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte auf dem Einheitskreise $|x|=1$ hat und $\varepsilon(n)$ habe dieselbe Bedeutung wie früher. Wenn, für jedes n , $n(1-\varepsilon(n))$ der n ersten Koeffizienten eine endliche Anzahl verschiedener Werte annehmen, die für jedes n dieselben sein sollen, so muß

$$(3) \quad f(x) = \frac{P(x)}{1-x^m} + g(x),$$

*) Die Argumente sind stets im Intervalle

$$-\pi < q \leq \pi$$

zu wählen. Für $k=1$ soll $f(x)$ in $x=-1$ regulär sein. Diesen Fall führt man durch Subtraktion von $\frac{c}{1-x}$ auf einen bekannten Satz von Fabry zurück, der also auch aus A folgt.

wo $P(x)$ ein Polynom ist, m eine ganze Zahl und $g(x)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius > 1 .

Nehmen wir $\varepsilon(n) = 0$ an*), so kann B. folgendermaßen formuliert werden:

Satz C. Die Folge $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

enthalte nur eine endliche Anzahl verschiedener Größen. Damit die Folge von einer gewissen Stelle ab periodisch sei, ist hinreichend und notwendig, daß die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte auf dem Einheitskreise hat, und dann ist

$$f(x) = \frac{P(x)}{1 - x^m}.$$

Es war meine Absicht, diese Sätze in Zusammenhang mit naheliegenden Fragen zu behandeln. Unter Verweisung auf eine spätere Mitteilung habe ich schon C. als Hilfsatz benutzt in einer Abhandlung „Über eine Interpolationsreihe für ganze Funktionen und über ganzwertige Funktionen“, die 1917 zur Zeitschrift für Mathematik und Physik eingereicht wurde. Zwei Abhandlungen in Math. Ann. Bd. 78 von Herren Jentzsch (Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, S. 276—285) und Pólya (derselbe Titel, S. 286—293) veranlassen mich, den Beweis von C. zu veröffentlichen; für diesen Beweis brauche ich Satz A als Hilfsatz. Der Hauptsatz von Herrn Jentzsch (S. 283) entspricht dem speziellen Fall von B. (mit $\varepsilon(n) = 0$), daß $f(x)$ eindeutig in einem Kreise $|x| < r > 1$ vorausgesetzt wird.

2. Für die Beweise brauche ich einige Hilfsätze, die ich hier zusammenstelle.

a) Es sei $u = \alpha$ eine Wurzel der Ordnung m der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$P(u) = u^k + c_1 u^{k-1} + \dots + c_k = 0.$$

Es sei ferner z eine reelle Veränderliche und $\psi(z)$ eine Funktion von z , die der Ungleichung

$$(4) \quad |\psi(z)| < e^{-(l - \varepsilon(z))z}, \quad l > 0$$

genügt. Die Gleichung $P(u) - \psi(z) = 0$

*) Dieser Fall entspricht dem Titel dieser Abhandlung; der Kürze halber wurde er so gewählt.

hat m Wurzeln $u = u_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, m$, die gegen α konvergieren, wenn z unbegrenzt wächst, und zwar so, daß

$$|u_i(z) - \alpha| < e^{-(l-i(z))^{\frac{1}{m}}}$$

Beweis:

$$P(u) = (u - \alpha)^m [(u - \alpha)^{k-m} + b_{k-m-1}(u - \alpha)^{k-m-1} + \dots + b_0], \quad b_0 \neq 0.$$

Ist $A \geq 1$, $A \geq |b_i|$, $i = 1, 2, \dots, k-m-1$,

und wird $r = |u - \alpha|$ hinreichend klein gewählt, $r < r_1$, so wird

$$|P(u)| \geq r^m \left(|b_0| - \frac{Ar}{1-r} \right) > r^m \frac{b_0}{2}.$$

Wir geben jetzt ein beliebiges $\varepsilon_1 > 0$ an, bestimmen z_0 so, daß, für alle $z > z_0$, in (4) $|\varepsilon(z)| < \varepsilon_1$ wird und daß

$$r = e^{-\frac{(l-2\varepsilon_1)^{\frac{1}{m}}}{m}} \cdot \left(\frac{|b_0|}{2} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$< r_1$ ausfüllt. Dann ist $|P(u)| > e^{-(l-2\varepsilon_1)z}$

$$\frac{\psi(z)}{P(u)} < e^{-\varepsilon_1 z} < 1.$$

Nach einem bekannten Satze hat $P(u) - \psi(z) = 0$ m Wurzeln im Kreise $|u - \alpha| < r$, was unsere Behauptung war.

b) Es sei

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^n}{b_n^n} \right),$$

$$(5) \quad b_n = n(1 - \varepsilon(n)), \quad b_n^2 > 0.$$

$H(z)$ ist eine ganze Funktion mit folgenden Eigenschaften: Für $\varepsilon > 0$ und beliebig klein gibt es unendlich viele Kreise C_n mit unendlich wachsenden Radien, auf denen

$$(6) \quad |H(z)| > e^{-c^1 + \varepsilon}, \quad z = \rho e^{i\psi};$$

auf der reellen Achse ist

$$(7) \quad H(\rho) = O(e^{\rho s(\rho)});$$

auf den Strahlen $\psi = \pm \eta$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, ist

$$(8) \quad |H(z)| = e^{\rho(\pi + s(\rho) \sin \eta)}.$$

Die Ungleichung (6) ist eine unmittelbare Folge eines bekannten Satzes in der Theorie der ganzen Funktionen. (8) kann in folgender Weise bewiesen werden. Für $\psi = \pm \eta$ ist

$$|n^2 - z^2| \geq n^2 \sin 2\eta, \quad |b_n^2 - z^2| \geq b_n^2 \sin 2\eta,$$

$$\frac{1 - \frac{z^2}{b_n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = 1 + z^2 \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{b_n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}}, \quad \frac{1 - \frac{z^2}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{b_n^2}} = 1 + z^2 \frac{\frac{1}{b_n^2} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{b_n^2}},$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\varrho^2 s(n)}{n^2 \sin 2\eta}} < \left| \frac{1 - \frac{z^2}{b_n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \right| < 1 + \frac{\varrho^2 s(n)}{n^2 \sin 2\eta},$$

$$e^{-\varrho s(\varrho)} < \left| \frac{H(z)}{\sin \pi z} \right| < e^{\varrho s(\varrho)},$$

was genau (8) enthält. (7) könnte ohne Schwierigkeit direkt bewiesen werden; indessen brauchen wir für das Folgende Hilfssatz c) unten, und mit Anwendung dieses Satzes kann (7) sogleich aus (8) abgeleitet werden. Denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, und wählt man in (8) η so klein, daß, für ϱ hinreichend groß,

$$|H(\varrho e^{\pm i\eta})| < e^{\varepsilon_1 \cdot \varrho}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon \cos \eta,$$

wird, so kann c) auf $\Phi(z) = H(z) e^{-\frac{z \theta_1}{\cos \eta}}$

angewendet werden und dies gibt

$$H(\varrho) = O(e^{\varepsilon_1 \cdot \varrho}).$$

c) Es sei $\Phi(z)$ für $z = \varrho e^{i\psi}$,

$$(9) \quad -\eta \leq \psi \leq \eta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{regulär. Wenn}$$

$$(10) \quad \Phi(\varrho e^{\pm i\eta}) = O(1);$$

wenn ferner, für jedes $\varepsilon > 0$,

$$(11) \quad \Phi(z) = O(e^{\varepsilon_1 + \varepsilon}),$$

auf unendlich vielen Kreisbögen C_n mit unbegrenzt wachsenden Radien, so ist im ganzen Sektor (9)

$$(12) \quad \Phi(z) = O(1).$$

3. Satz D. Es sei $\varphi(z)$ eine für $z = \varrho e^{i\psi}$,

$$-\eta \leq \psi \leq \eta < \frac{\pi}{2}$$

reguläre Funktion, die den Ungleichungen

$$\varphi(\varrho e^{\pm i\eta}) = O(e^{\varepsilon_1 \sin \eta}) \quad \text{mit} \quad \theta < \frac{\pi}{k}$$

$$\varphi(z) = O(e^{\varepsilon_1 \psi}), \quad a \text{ konst.}$$

genügt. Wenn, für jedes n , $n(1 - \varepsilon(n))$ der Größen

$$\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)$$

eine Anzahl $\leq k$ verschiedener Werte annehmen, die für jedes n dieselben sind, so lassen sich zwei Zahlen c und $\delta > 0$ derart finden, daß, für z reell und positiv,

$$(13) \quad |\varphi(z) - c| < e^{-(\delta - s(z))z}.$$

Beweis: Es seien c_1, c_2, \dots, c_k die k Werte von $\varphi(n)$ und $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

die nach wachsender Größe geordneten ganzen Zahlen, für welche $\varphi(b_n)$ einen Wert c_1, c_2, \dots, c_k annimmt. Nach der Voraussetzung ist (5) erfüllt und mithin auch die Ungleichungen (6), (7), (8) für die ganze Funktion $H(z)$. Schreiben wir

$$(14) \quad \psi(z) = \prod_{r=1}^k (\varphi(z) - c_r),$$

$$\Phi(z) = e^{l z} \frac{\psi(z)}{H(z)},$$

so ist $\Phi(z)$ im Sektor (9) regulär und genügt der Ungleichung (11) für z auf den Bogen C_n . Wird die Konstante l so gewählt, daß

$$0 < l \cos \eta < (\pi - k\theta) \sin \eta,$$

was ja immer möglich ist, so ist (10) erfüllt und folglich (12) im ganzen Sektor (9). Nach (7) muß also, für z reell und positiv,

$$|\psi(z)| < e^{-(l - s(z))z}.$$

Jetzt können wir Hilfssatz a) auf die Gleichung (14) anwenden, und dies führt zur behaupteten Ungleichung (13), wo also $c = c_1 = c_2 = \dots = c_k$, $\delta = l$ zu setzen ist.

Im allgemeinen gilt selbstverständlich nicht $\varphi(z) = c$. Dies ist aber der Fall, wenn $\eta = \frac{\pi}{2}$:

Zusatz. Bleiben die Voraussetzungen in Satz D für $\eta = \frac{\pi}{2}$ gültig, so muß

$$\varphi(z) = c$$

identisch gelten. Denn $\psi(z)$ muß identisch verschwinden, wie der folgende Satz zeigt:*)

Es sei $\psi(z)$ für $\Re(z) \geq 0$ regulär und für diese z

$$\psi(z) = O(e^{az}), \quad a \text{ konst.},$$

ferner

$$\psi(\pm i\varrho) = O(e^{\theta_1 \varrho}) \quad \text{mit } \theta_1 < \pi.$$

*) Ein Beweis dieses Satzes findet sich in meiner Dissertation (Sur une classe de séries de Taylor, Upsala 1914, S. 58). Für eine ganze Funktion $\psi(z)$, die für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ verschwindet, hat ihn Herr Wigert wiedergefunden (Sur un théorème concernant les fonctions entières, Arkiv för Matematik, Bd. 11, 1916, Nr. 21).

Wenn, für jedes n , die Anzahl der von Null verschiedenen Werte von $\psi(v)$, $v = 1, 2, \dots, n$ gleich $n\varepsilon(n)$ ist, so muß $\psi(z)$ identisch verschwinden.

4. Satz E. Es sei

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ≥ 1 , die regulär ist in jedem Punkt des Bogens

$$x = e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geq \frac{\pi}{k}$$

(die Endpunkte inbegriffen). Dann gibt es eine*) Funktion $\varphi(z)$ mit folgenden Eigenschaften. $\varphi(z)$ ist regulär in einem Sektor

$$z = \varrho e^{i\psi}, \quad -\eta \leq \psi \leq \eta,$$

der die positive reelle Achse im Innern enthält. Für z in diesem Sektor ist

$$\varphi(z) = O(e^{\alpha z}), \quad \alpha \text{ konst.}$$

Auf den Begrenzungsstrahlen $\psi = \pm \eta$ ist

$$(15) \quad \varphi(z) = O(e^{\theta \sin \eta}) \quad \text{mit} \quad \theta < \frac{\pi}{k}.$$

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist $\varphi(n) = a_n$.

Beweis: Nach der Voraussetzung können

$$R > 1, \quad \theta_1 < \frac{\pi}{k}$$

so gewählt werden, daß $f(x)$ im Innern und auf der Begrenzung des Sektors

$$|x| = R, \quad |\arg x| \geq \theta_1$$

regulär ist. Mit einem $r < 1$, das wir unten festsetzen wollen, wird der geschlossene Weg S folgendermaßen definiert:

1. der Bogen $|x| = R, |\arg x| > \theta_1$,
2. der Bogen $|x| = r, |\arg x| < \theta_1$,
3. die geradlinigen Stücke $r \leq |x| \leq R, \arg x = \pm \theta_1$.

Dann ist

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(x)}{x-z} dx$$

die behauptete Funktion, wenn S im positiven Sinne durchlaufen wird mit $x = Re^{-\pi i}$ als Ausgangspunkt. Offenbar ist $\varphi(z)$ ganz und $\varphi(n) = a_n$.

Wird

$$|f(x)| \leq M$$

gesetzt, so ist

$$(16) \quad |\varphi(z)| \leq \frac{2MR}{r} \left\{ \frac{e^{i\pi(\sin \theta)}}{R^2 \cos \theta} + \frac{e^{i\theta_1(\sin \theta)}}{r^2 \cos \theta} \right\}.$$

*) Oder unendlich viele ganze Funktionen; immer kann $\alpha = \pi + \varepsilon$ gewählt werden.

Wir wählen ein θ im Intervalle

$$\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{k}$$

und r so, daß $\theta - \theta_1 > (\pi - \theta_1) \frac{\log \frac{1}{r}}{\log \frac{R}{r}}$,

was immer möglich ist. η wird dann aus

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\log \frac{R}{r}}{\pi - \theta_1}, \quad 0 < \eta < \frac{\pi}{2}$$

bestimmt. Aus (16) und

$$(\pi - \theta_1) \sin \eta - \log \frac{R}{r} \cos \eta = 0,$$

$$(\theta - \theta_1) \sin \eta - \log \frac{1}{r} \cos \eta > 0$$

folgt (15), w. z. b. w.

5. Satz A ist nun eine unmittelbare Folge von Satz D und Satz E. In diesem Zusammenhange sind die einfachsten Reihen mit k verschiedenen Koeffizienten zu betrachten, die von der Form:

$$\sum_{v=1}^p \frac{e_v}{1 - xe^{i\alpha_v}}, \quad \alpha_v \text{ rational} \quad \text{sind. Die Reihen}$$

$$\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1 - xe^{\frac{\pi i}{k}}} - \frac{1}{1 - xe^{-\frac{\pi i}{k}}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{\pi n}{k}, \quad k \text{ ungerade}$$

$$2 \cos \frac{\pi}{k} + (1+x) \left[\frac{1}{1 - xe^{\frac{\pi i}{k}}} + \frac{1}{1 - xe^{-\frac{\pi i}{k}}} \right] = 4 \cos \frac{\pi}{2k} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos \frac{\pi(2n-1)}{2k},$$

k gerade,

haben k verschiedene Koeffizienten und die singulären Punkte $x = e^{\pm \frac{\pi i}{k}}$. Sie sind also auf dem Bogen

$$x = e^{i\varphi}, \quad |\varphi| > \frac{\pi}{k}$$

regulär. Anderseits gibt es Reihen mit k verschiedenen Koeffizienten und einer einzigen singulären Stelle:

$$\frac{1}{1 - xe^{-\frac{2\pi i}{k}}} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-\frac{2\pi i n}{k}}.$$

Diese Stelle muß auf dem Bogen $|\varphi| \geq \frac{\pi}{k}$ liegen. Allgemeiner kann man behaupten, daß Satz A gültig bleibt, wenn man voraussetzt, daß $f(x)$ regulär

ist in jedem Punkte eines Bogens von der Größe $2\pi - \frac{2\pi}{k}$ (die Endpunkte inbegriffen), dessen Mittelpunkt auf dem Bogen

$$x = e^{iq}, \quad \pi - q \leq \frac{\pi}{k}$$

liegt. Einen Grenzfall liefert hier die Reihe

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-xe^{\frac{2\pi i}{k}}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(1 + e^{\frac{2\pi i n}{k}}\right).$$

6. Um B zu beweisen nehmen wir an, daß, für jedes n , $n(1-\varepsilon(n))$ der n ersten Koeffizienten der Reihe (1) eine Anzahl $< k$ verschiedener Werte annehmen, die für jedes n dieselben sind. Es seien

$$x = e^{iq_p}, \quad p = 1, 2, \dots, p$$

die singulären Punkte von $f(x)$ auf dem Einheitskreise. Dann lassen sich bekanntlich eine in den Grenzen $1, (2q)^p$ liegende ganze Zahl m und dazu p andere ganze Zahlen

m_1, m_2, \dots, m_p derart angeben, daß

$$q_p - \frac{2\pi m_p}{m} < \frac{\pi}{mq}, \quad p = 1, 2, \dots, p$$

wird. Mit

$$x = e^{-m}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1$$

als Mittelpunkt legen wir einen Bogen b_s von der Größe $2\delta = \frac{2\pi}{mq}$. Dann liegen alle singulären Punkte von $f(x)$ auf $|x| = 1$ innerhalb der Bogen b_s . Schreiben wir

$$f_\mu(x) = a_\mu + a_{\mu+1}x + a_{\mu+2}x^2 + \dots,$$

$$F_\mu(x) = \sum_{s=0}^{m-1} f_\mu\left(xe^{\frac{2\pi i s}{m}}\right),$$

so ist

$$F_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^\lambda a_{\lambda+\mu} \sum_{s=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i s \lambda}{m}}$$

$$= m \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{m\lambda} a_{\mu+m\lambda},$$

folglich

$$(17) \quad \begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F_\mu(x) &= m \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{\mu+m\lambda} a_{\mu+m\lambda} \\ &= mf(x). \end{aligned}$$

$f_n(x)$ hat dieselben singulären Punkte wie $f(x)$; die singulären Stellen von $F_\mu(x)$ liegen innerhalb der Bogen b_ν . Setzen wir in $F_\mu(x)$

$x^n = t,$ so wird

$$\frac{1}{m} F_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda a_{\mu+m\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda a_\lambda = g_\mu(t).$$

Für jedes n nehmen $n(1 - \varepsilon(n))$ der n ersten Koeffizienten a_λ eine Anzahl $\leq k$ verschiedener Werte an, die für jedes n dieselben sind. Ferner ist $g_\mu(t)$ auf dem Bogen $t = e^{i\varphi}, \quad v \geq \delta m = \frac{\pi}{q}$

regulär. Ist $q \geq k$ gewählt, was uns frei steht, so folgt nach A

$$g_\mu(t) = \frac{c_\mu}{1-t} + G_\mu(t),$$

wo c_μ eine Konstante ist und $G_\mu(t)$ eine Taylorsche Reihe mit dem Konvergenzradius > 1 . Führen wir dies in (17) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F_\mu(x) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{c_\mu x^\mu}{1-x^m} + \sum_{\mu=0}^{m-1} G_\mu(x^m) x^\mu \\ &= \frac{P(x)}{1-x^m} + g(x), \end{aligned}$$

wo $P(x)$ ein Polynom ist und $g(x)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius > 1 , w. z. b. w.

Wenn $g(x)$ in A oder B einen endlichen Konvergenzradius ρ hat, muß der Konvergenzkreis $|x| = \rho$ singuläre Linie sein.

Eine neue Methode zur Lösung der Randwertaufgabe partieller Differentialgleichungen.

Von

E. TREFFTZ in Aachen.

In der vorliegenden Arbeit entwickle ich für die Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ ein Verfahren, das einer weitgehenden Verallgemeinerung — auf andere Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung — fähig ist.

Ursprünglich war ich von einem ebenen Problem der Elastizitätstheorie ausgegangen; es handelte sich um die Aufgabe, die Spannungen in ebenen Platten zu bestimmen, deren Umriß von der erstrebten Kreisform infolge von Herstellungsfehlern abweicht. Mathematisch heißt dies, die Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta \Delta u = 0$ für nahezu kreisförmige Gebiete zu lösen.

Es lag nahe, vor dieser weitergehenden Aufgabe erst den entsprechenden einfacheren Fall der Gleichung $\Delta u = 0$ in Angriff zu nehmen, und das ist in der vorliegenden Arbeit geschehen. Das wesentliche Ergebnis meiner Arbeit liegt also in der Beantwortung der folgenden Frage: Gegeben sei ein Gebiet G und ein in G liegendes Gebiet G' , das sich von G nur wenig unterscheidet. Inwiefern kann die Lösung der Randwertaufgabe für G als Näherungslösung der Randwertaufgabe für G' gelten, oder durch welches Verfahren kann ich aus der Kenntnis der Greenschen Funktion für G die Lösung für G' gewinnen?

In Beantwortung dieser Frage gewinne ich ein Verfahren von großer Allgemeinheit. Auch praktisch ist es für nahezu kreisförmige Gebiete hervorragend brauchbar; ich werde an anderer Stelle die Anwendung des Verfahrens auf die Praxis der konformen Abbildung behandeln.

Da alle wesentlichen Ergebnisse in der Lösung der speziellen Aufgabe enthalten sind, die Randwertaufgabe erster Art für nahezu kreisförmige Gebiete zu lösen, stelle ich das Problem gleich in dieser vereinfachten Form dar.

§ 1. Ein naheliegendes Näherungsverfahren für fast kreisförmige Gebiete.

Wir wollen uns also mit der Aufgabe beschäftigen, die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für nahezu kreisförmige Gebiete zu lösen. Unter einem nahezu kreisförmigen Gebiete wollen wir dabei ein Gebiet verstehen, daß im Sinne der Anschauung „fast kreisförmig“ ist; und zwar beschränken wir uns zunächst auf den ganz einfachen Fall, daß die Randkurve des betrachteten Gebietes in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = r(\theta)$ gegeben sei, wo von $r(\theta)$ also vorausgesetzt wird, daß es eine eindeutige, stückweise zweimal differenzierbare, stetige Funktion von der Periode 2π sei; außerdem sei $\frac{dr}{d\theta}$ klein.

Will man für ein solches Gebiet die Randwertaufgabe lösen, so liegt es nahe, den folgenden Weg zu gehen. Wir zeichnen um das gegebene Gebiet G einen umschließenden Kreis K und ordnen diejenigen Punkte der Randkurve R und des Kreises K einander zu, die auf gleichen Radien liegen (siehe Figur 1). Nun lösen wir die Randwertaufgabe nicht für das gegebene Gebiet G , sondern für den Kreis K , indem wir als Randwerte auf K je den Wert nehmen, der auf dem entsprechenden Punkte der eigentlichen Randkurve R vorgeschrieben ist. Wir erhalten auf diese Weise eine erste Näherung $g_1(x, y)$, die auf der Randkurve R zwar nicht die vorgeschriebenen Werte $g(s)$ annimmt, deren Fehler daselbst:

$$f_1(s) = g(s) - g_1(s)$$

aber verhältnismäßig gering sein wird. Für die nötige Korrektion hätten wir nun die gleiche Randwertaufgabe mit den Werten $f_1(s)$ auf der Randkurve zu lösen. Wir verfahren wieder genau wie beim ersten Male, und schieben wieder die neuen Randwerte auf den Kreis K hinaus. Die für den Kreis gelöste Randwertaufgabe liefert dann wieder auf der Randkurve R statt der verlangten Korrektion etwas abweichende Werte, aber der Fehler wird sich wieder verringert haben. So hätte man fortzufahren, bis der Fehler unter den im gegebenen Fall zulässigen Betrag gesunken wäre.

In Formeln drückt sich das beschriebene Verfahren folgendermaßen aus. Es seien mit t die Punkte des Kreises K bezeichnet, mit s die Punkte der eigentlichen Randkurve R ; $2\pi N(xy, t)$ sei die Normalableitung

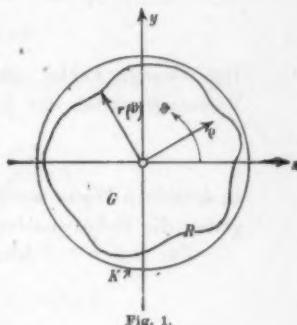


Fig. 1.

der Greenschen Funktion für den Kreis K . Dann ist in einem Punkte (x, y) der Wert der Potentialfunktion $g_1(x, y)$, die auf dem Kreise K die Werte $g(t)$ annimmt:

$$g_1(x, y) = \oint N(xy, t) \cdot g(t) \cdot dt.$$

Auf der Randkurve R nimmt $g_1(x, y)$ also die Werte

$$f_1(s) = \int N(s, t) \cdot g(t) \cdot dt$$

an, der Fehler der ersten Näherung ist also

$$f_1(s) = g(s) - \int N(s, t) \cdot g(t) \cdot dt.$$

Die erste Korrektion erhalten wir, indem wir mit den Randwerten $f_1(s)$ auf dem Kreise K die Randwertaufgabe lösen:

$$k_1(x, y) = \int N(xy, t) \cdot f_1(t) \cdot dt.$$

Den zweiten Fehler erhalten wir in dem Unterschied der Werte dieser Potentialfunktion auf der Randkurve R und dem Kreise K , also:

$$f_2(s) = f_1(s) - \int N(s, t) \cdot f_1(t) \cdot dt.$$

In derselben Weise werden die weiteren Korrekturen gewonnen; allgemein gelten die Rekursionsformeln:

Für den n^{ten} Fehler:

$$f_n(s) = f_{n-1}(s) - \int N(s, t) \cdot f_{n-1}(t) \cdot dt.$$

Für die n^{te} Korrektion:

$$k_n(x, y) = \int N(xy, t) \cdot f_n(t) \cdot dt.$$

Hieraus ergibt sich für den n^{ten} Fehler die Formel:

$$f_n(s) = g(s) + \sum_1^n \left\{ (-1)^r \cdot \binom{n}{r} \int N^{(r)}(s, t) \cdot g(t) \cdot dt \right\},$$

wo $N^{(r)}(s, t)$ die r^{te} Iteration des Kernes $N(s, t)$ ist. Es läge an und für sich nahe, die letzte Formel zur Untersuchung der Konvergenz des Verfahrens heranzuziehen. Man kommt damit aber nicht zum Ziele; es wird sich zeigen, daß das Verfahren überhaupt nicht zu konvergieren braucht. Im nächsten Paragraphen werden wir aber zeigen, daß es trotzdem bis zu einem gewissen Grade brauchbare Näherungslösungen liefern kann.

^{*)} Für die über den Rand des Kreises K zu nehmenden Integrale werde ich hier und im folgenden die Angabe der Grenzen oder des Integrationsweges fortlassen.

§ 2. Konvergenzbetrachtungen.

Das im ersten Paragraphen dargestellte Verfahren ist wegen seiner Einfachheit für die praktische Ausführung sehr geeignet; will man aber einen Konvergenzbeweis führen, so stößt man auf Schwierigkeiten. Um diese zu überblicken und zugleich um die weitere Ausgestaltung des Verfahrens vorzubereiten, wollen wir den allereinfachsten Fall betrachten, das ist der Fall zweier konzentrischen Kreise, von denen der kleinere R den Radius $c < 1$ haben soll, der größere, der die Rolle des „umschließenden Kreises“ spielt, den Radius 1 (siehe Figur 2).

Es soll also hier für den kleineren Kreis R die Randwertaufgabe gelöst werden; die erste Näherung ist die Lösung der Randwertaufgabe für den größeren Kreis K mit den vorgegebenen Randwerten $g(\theta)$. Entwickeln wir diese nach Fourier:

$$g(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cdot \cos v\theta + b_v \cdot \sin v\theta),$$

so erhalten wir als erste Näherung

$$g_1(\rho\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \rho^v (a_v \cdot \cos v\theta + b_v \cdot \sin v\theta),$$

die eben die vorgeschriebenen Randwerte auf dem Kreise K annimmt. Auf dem Kreise R hat sie die Werte:

$$g_1(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} c^v (a_v \cdot \cos v\theta + b_v \cdot \sin v\theta).$$

Der Fehler der ersten Näherung wird also:

$$f_1(\theta) = \sum_{v=1}^{\infty} (1 - c^v) \cdot (a_v \cdot \cos v\theta + b_v \cdot \sin v\theta).$$

Die Korrektion $k_1(\rho\theta)$ nimmt diese Werte wieder auf dem großen Kreise K an statt auf R :

$$k_1(\rho\theta) = \sum_{v=1}^{\infty} \rho^v \cdot (1 - c^v) \cdot (a_v \cdot \cos v\theta + b_v \cdot \sin v\theta),$$

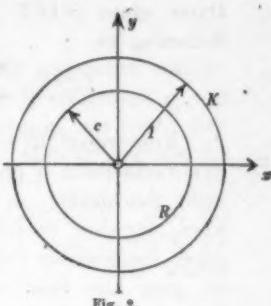


Fig. 2.

hat also auf R gegen die eigentlich vorgeschriebenen Werte $f_1(\theta)$ den Fehler:

$$f_1(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} (1 - r^2) \cdot (a_r \cdot \cos \nu \theta + b_r \cdot \sin \nu \theta).$$

Durch einen Schluß von n auf $n+1$ findet man den Fehler der n^{ten} Näherung zu:

$$f_n(\theta) = \sum_{r=1}^n (1 - r^2)^n \cdot (a_r \cdot \cos \nu \theta + b_r \cdot \sin \nu \theta). \quad (\text{I})$$

Konvergiert die Fourierreihe für $g(\theta)$ gleichmäßig, so geht auch $f_n(s)$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null. Konvergiert die Fourierreihe nicht gleichmäßig, so kann man noch zeigen, daß wenigstens für jeden Kreis, der ganz im Innern des Kreises R liegt, das Verfahren gleichmäßig gegen die gesuchte Potentialfunktion konvergiert. Der Beweis ist einfach, ich gehe hier nicht näher darauf ein; der später behandelte allgemeine Fall wird ihn als Spezialfall enthalten.

Der Versuch, den für den Kreis so einfachen Konvergenzbeweis auf den allgemeinen Fall zu übertragen, schlägt fehl; ich komme darauf im nächsten Paragraphen zurück. Hier möchte ich noch auf die Erklärung der Tatsache eingehen, daß das Verfahren sich auch im allgemeinen Falle als sehr brauchbar erweist, was ich als „praktische Konvergenz“ bezeichnen möchte. Man erhält eine Erklärung, wenn man sich auf eine endliche Anzahl von Fourergliedern beschränkt. Es sei h die Anzahl von Fourergliedern, die wir berücksichtigen, und es sei:

$$f_n(\theta) = \sum_{r=0}^h (a_r^{(n)} \cdot \cos \nu \theta + b_r^{(n)} \cdot \sin \nu \theta)$$

die Fourierentwicklung des n^{ten} Fehlers bis zum h^{ten} Gliede. Die n^{te} Korrektion nimmt diese Werte statt auf der Randkurve R (siehe wieder Figur 1) auf dem Kreise K an, ist also gegeben durch:

$$k_n(\varrho \theta) = \sum_{r=0}^h \varrho^r \cdot (a_r^{(n)} \cdot \cos \nu \theta + b_r^{(n)} \cdot \sin \nu \theta).$$

Auf R wird der Fehler:

$$f_{n+1}(\theta) = \sum_{r=0}^h (1 - r^2) \cdot (a_r^{(n)} \cdot \cos \nu \theta + b_r^{(n)} \cdot \sin \nu \theta).$$

Will man jetzt die $n+1^{\text{te}}$ Korrektion finden, so hat man $f_{n+1}(\theta)$ wieder nach Fourier zu entwickeln, wobei nun zu bemerken ist, daß r nicht mehr wie oben eine Konstante ist, sondern auch von θ abhängt. Führt man

diese Fourierentwicklung wieder bis zum k^{ten} Gliede durch, so erhält man die Fourierkoeffizienten des $n + 1^{\text{ten}}$ Fehlers als lineare Funktionen der Fourierkoeffizienten des n^{ten} Fehlers:

$$c_r^{(n+1)} = \sum_0^{2k} \alpha_{\mu r} c_\mu^{(n)}.$$

(Die oberen Indizes bezeichnen den Fehler, die c mit ungeradem und geradem Index sind für die a und b gesetzt.) Die Koeffizienten $\alpha_{\mu r}$ in diesen Rekursionsformeln sind dabei von n unabhängig, sie bestimmen sich aus der Fourierentwicklung der Potenzen von r nach θ , d. h. aus der Gestalt der Randkurve.

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen die Fehler, d. h. die $c_r^{(n)}$ gegen Null gehen. Nach den in der Theorie der Integralgleichungen häufig benutzten Sätzen ist dies dann der Fall, wenn die größte Wurzel der Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \vdots & \cdots & a_{kk} - x \end{vmatrix} = 0$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als eins ist.*)

Für den oben behandelten einfachen Fall, daß die Randkurve R ein Kreis mit dem Radius c ist, reduziert sich die Determinante auf ihre Diagonalglieder, und die Determinantengleichung wird:

$$\prod_0^k \{(1 - c^r) - x\}^2 = 0$$

es werden also in der Tat alle Wurzeln der Determinantengleichung kleiner als eins.

Nun ist die Determinantengleichung offenbar eine stetige Funktion ihrer Koeffizienten; schließt sich die Randkurve R einem Kreise hin-

* Betrachten wir nämlich die Rekursionsformel $c_r^{(n+1)} = \sum_1^{2k} \alpha_{\mu r} c_\mu^{(n)}$ als Auf-

lösung der Gleichungen: $c_r = \lambda \sum \alpha_{\mu r} c_\mu$ durch sukzessive Approximation, oder was dasselbe ist, durch die Neumannsche Reihe für $\lambda = 1$, so geht c_r gegen Null, solange $\lambda = 1$ kleiner ist als der kleinste Eigenwert λ_0 des Gleichungssystems. Setzen wir $x = \frac{1}{\lambda_0}$, so bestimmt sich x aus der angeschriebenen Determinantengleichung. Es muß also $\lambda = 1 < \frac{1}{x_0}$ sein oder $x_0 < 1$, q. e. d.

reichend nahe an, so werden für eine gewisse Anzahl von Fouriergliedern die Wurzeln der charakteristischen Gleichung kleiner als 1 bleiben, d. h.: Wenn man sich auf eine gewisse Anzahl von Fouriergliedern beschränkt, so geht der Fehler (d. h. seine h ersten Fourierkoeffizienten) gegen Null; und die Zahl h von Fouriergliedern, die man noch berücksichtigen kann, ohne daß das Verfahren divergiert, ist um so größer, je näher sich das gegebene Gebiet einem Kreise anschließt.

Damit ist natürlich nicht gesagt, daß nicht die höheren Glieder in der Entwicklung des Fehlers verhältnismäßig groß werden können, aber man erhält einen Fehler, für den die Fourierkoeffizienten a_0 bis a_h , b_h verschwinden, woraus man bekanntlich schließen kann, daß der Fehler bei stetigen Randwerten an mindestens $2h$ Punkten verschwindet. Ersetzt man die Fourierentwicklung durch die trigonometrische Interpolation, so erhält man durch das angegebene Verfahren das Potentialpolynom h^{tes} Grades*), das an $2h$ äquidistanten Punkten die dort vorgeschriebenen Randwerte annimmt.

Die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens beruht darauf, daß es sich in den praktischen Fällen meistens um verhältnismäßig einfache Randkurven und Randwerte handelt, die durch solche Polynome von einigen Gliedern genügend gut angenähert werden können, so daß die praktisch ausreichende Anzahl von Gliedern unterhalb der Grenze liegt, für die das Verfahren divergiert.

§ 3. Abänderung des ersten Verfahrens zu einem konvergenten Verfahren.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, das im ersten Teile beschriebene Verfahren so abzuändern, daß wir ein konvergentes Verfahren erhalten, und wollen zu diesem Zwecke zunächst einige Bestimmungen treffen und die Bezeichnungen festlegen (siehe Figur 3).

Zunächst können wir die Einschränkung fallen lassen, daß es sich um fast kreisförmige Gebiete handelt; wir wollen von der Berandung von G nur voraussetzen, daß die Randkurve R endliche, stückweise stetige Krümmung und nur eine endliche Anzahl von Ecken haben soll. Wir legen um das Gebiet G wieder einen umschließenden Kreis K , der die Randkurve R von G nicht berührt. Der Mittelpunkt

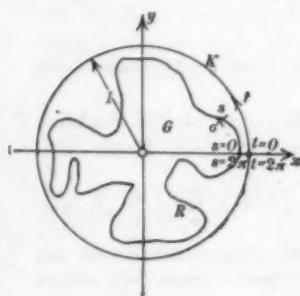


Fig. 3.

$$*) u = a_0 + \sum_{r=1}^{h-1} r^{-1} (a_r \cos r\theta + b_r \sin r\theta) + a_h \theta^h \cos h\theta.$$

des Kreises K sei der Nullpunkt des Koordinatensystems (x, y rechtwinklige, ϱ, θ Polarkoordinaten). Der Radius des Kreises K kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden. Mit dem Buchstaben t charakterisieren wir die Bogenlänge auf dem Kreise K , gerechnet von dem Halbstrahl $\theta = 0$ aus, mit s die Punkte der Randkurve R , und zwar gehen s und t von 0 bis 2π , wenn wir R und K einmal durchlaufen. Ist σ die Bogenlänge auf R , so sei $\frac{d\sigma}{ds}$ endlich. Ein Punkt der Randkurve R heiße einem Punkte des Kreises K zugeordnet, wenn sie durch denselben Wert für s und t charakterisiert sind. $2\pi \cdot N(x, y, t)$ sei die Normalableitung der Greenschen Funktion für den Kreis K . Eine Potentialfunktion, für die auf dem Kreise die Werte $f(t)$ vorgeschrieben sind, ist also im Innern des Kreises K durch das Randintegral:

$$g(x, y) = \int_{\text{R}} N(xy, t) \cdot f(t) \cdot dt \quad \text{gegeben.}$$

Uns interessieren natürlich vor allem die Werte auf der Randkurve R :

$$g(s) = \int_{\text{R}} N(s, t) \cdot f(t) \cdot dt. \quad *)$$

Der einfache Konvergenzbeweis im Falle der konzentrischen Kreise beruhte auf der Möglichkeit der Entwicklung in die Fourierreihe, d. h. auf der Entwicklung in eine Reihe von Funktionen, deren Werte auf dem kleineren Kreise (der Randkurve R) bis auf einen konstanten Faktor den Werten auf den entsprechenden Punkten des äußeren Kreises gleich waren. Entsprechend wird man geneigt sein, auch im allgemeinen Falle nach Funktionen zu fragen, deren Werte in zugeordneten Punkten des Kreises K und der Randkurve R bis auf einen konstanten Faktor einander gleich sind; d. h. in der Sprache der Integralgleichungen: nach den Nulllösungen des Kernes $N(s, t)$, denn diese genügen gerade Gleichungen der Form:

$$n(t_1) = \lambda \int_{\text{R}} N(t_1, t) \cdot n(t) \cdot dt = \lambda n(s = t_1). \quad *)$$

Diese Funktionen erweisen sich aber als ungeeignet für unsere Zwecke, auch wenn man das System der Nulllösungen durch Hinzufügen der so-

*) Hier und im folgenden bezieht sich der Buchstabe s stets auf einen Punkt der Randkurve. Es bedeutet also z. B. $g(s)$ stets den Wert, den die Potentialfunktion $g(x, y)$ in dem Punkt s der Randkurve annimmt. In den Ausdrücken $N(s, t)$, $N(t_1, t)$, $K(s, t)$ und $K(t_1, t)$ bezieht sich der erste Buchstabe stets auf den betreffenden Punkt der Randkurve R . Es ist also z. B. $N(t_1, t)$ die Normalableitung am Kreispunkte t für die Greensche Funktion des Punktes $s = t_1$ auf der Randkurve.

genannten Hauptfunktionen vervollständigt. Erstens ist über die Möglichkeit der Entwicklung nach solchen Funktionen nichts bekannt; zweitens reicht aber auch die bloße Möglichkeit der Entwicklung nicht aus. Wäre nämlich das v^{te} Glied in dieser Entwicklung $n_v(s)$, so wäre der Fehler der k^{ten} Näherung:

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_r}\right)^k \cdot n_v(s).$$

Das geht aber bloß dann gegen Null, wenn $\left|1 - \frac{1}{\lambda_r}\right| < 1$ ist, und das ist, da $N(s, t)$ unsymmetrisch ist, nicht zu erwarten.

Wir müssen also unser Verfahren abändern und zwar lassen wir uns hier von den Methoden leiten, die in der Theorie der Integralgleichungen ausgebildet worden sind. Wir werden vor allen Dingen trachten, von dem Kerne $N(s, t)$ zu einem symmetrischen Kerne überzugehen; zu diesem Zwecke werden wir versuchen, die Schmidtschen Eigenfunktionen*) des Kernes $N(s, t)$ nutzbar zu machen, die durch die Gleichungen:

$$p_r(t_1) = \lambda_r \int N(t_1, t) \cdot q_r(t) \cdot dt, \quad q_r(t) = \lambda_r \int N(t_1, t) \cdot p_r(t_1) \cdot dt_1$$

definiert sind.

Nach Analogie dieser Gleichungen verfahren wir nun: Sind auf der Randkurve R die Werte $g(s)$ für die gesuchte Potentialfunktion vorgeschrieben, so bilden wir *nicht* die Potentialfunktion, die diese Werte an den entsprechenden Punkten des Kreises K annimmt, sondern wir bilden zunächst die Zwischenfunktion:

$$h_0(t) = \int N(t_1, t) g(t_1) dt_1$$

und bilden hieraus erst als erste Näherung die Potentialfunktion, die auf dem Kreise K die Werte $h_0(t)$ annimmt:

$$g_1(x, y) = \int N(xy, t) \cdot h_0(t) \cdot dt,$$

die auf der Randkurve R die Werte

$$g_1(s) = \int N(s, t) \cdot h_0(t) \cdot dt$$

hat, also den Fehler: $f_1(s) = g(s) - g_1(s)$.

Mit dem Fehler von $g_1(x, y)$ verfahren wir nun auf die gleiche Weise, d. h. wir bilden die Korrekturen nicht direkt aus den Fehlern, indem wir die Fehlerrandwerte auf den Kreis K übertragen, und für diesen

*) Erhardt Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann. Bd. 68 (1907). Für das folgende siehe Seite 461—466.

die Randwertaufgabe lösen, sondern wir bilden aus dem n^{ten} Fehler $f_n(s)$ erst die Zwischenfunktion:

$$h_n(t) = \int N(t_1, t) \cdot f_n(t_1) \cdot dt_1$$

und nehmen als n^{te} Korrektion die Potentialfunktion:

$$k_n(x, y) = \int N(xy, t) \cdot h_n(t) \cdot dt = \iint N(xy, t) \cdot N(t_1, t) \cdot dt \cdot f_n(t_1) \cdot dt_1,$$

die auf dem Kreise K die Werte $h_n(t)$ hat.

Etwas anders läßt sich die Konstruktion der Korrekturen noch folgendermaßen erläutern:

Wir erzeugen die n^{te} Korrektion aus dem n^{ten} Fehler nicht wie früher durch die Greensche Funktion:

$$k_n(x, y) = \int N(xy, t) \cdot f_n(t) \cdot dt,$$

sondern durch die Funktion $K(xy, t)$, die aus $N(xy, t)$ folgendermaßen durch „Zusammensetzung nach der ersten Art“ entsteht:

$$K(xy, t) = \int N(xy, r) \cdot N(t, r) \cdot dr,$$

$$k_n(xy) = \int K(xy, t) \cdot f_n(t) \cdot dt.$$

Daß diese Methode mit der oben gegebenen identisch ist, erkennt man durch einfaches Ausrechnen; daß der Kern $K(s, t)$ symmetrisch ist, folgt aus der vorletzten Formel.

§ 4. Konvergenzbeweis.

Wir wenden uns jetzt dem Hauptbeweise der vorliegenden Arbeit zu, nämlich dem Beweise, daß das Verfahren in der abgeänderten Form wirklich konvergiert. Die Änderung gegen das ursprüngliche Verfahren besteht also darin, daß an Stelle der Funktion $N(xy, t)$ die Funktion

$$K(xy, t) = \int N(xy, r) \cdot N(t, r) \cdot dr$$

tritt. Die wesentliche Eigenschaft des Kernes $K(s, t)$ besteht in seiner Symmetrie. Die Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ sind die oben genannten Funktionen $p_r(s)$. Von den Eigenwerten λ_r^2 ist wichtig, daß sie selbstverständlich alle reell und als Quadrate der Schmidtschen Eigenwerte von $N(s, t)$ auch sämtlich positiv sind. Die Eigenfunktionen $p_r(s)$ vertreten nun für den allgemeinen Fall genau die trigonometrischen Funktionen in dem Falle der zwei konzentrischen Kreise. Nehmen wir in der Tat an,

die gegebenen Randwerte ließen sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den $p_r(s)$ entwickeln:

$$g(s) = \sum_0^{\infty} a_r \cdot p_r(s),$$

so würden wir, indem wir diese Randwerte auf den Kreis K hinausschieben, als erste Näherung die Potentialfunktion:

$$g_1(x, y) = \int K(xy, t) \cdot g(t) \cdot dt$$

erhalten, also als ersten Fehler auf R :

$$f_1(s) = \sum_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_r^2}\right) \cdot a_r \cdot p_r(s).$$

Die erste Korrektion erhalten wir jetzt genau wie Seite 248, indem wir die Werte $f_1(s)$ auf den Kreis K hinausschieben und die Potentialfunktion

$$k_1(x, y) = \int K(xy, t) \cdot f_1(t) \cdot dt = \sum_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_r^2}\right) \cdot \frac{a_r}{\lambda_r^2} \cdot p_r(xy)$$

bilden. Die Werte dieser Funktion unterscheiden sich auf der Randkurve R von den Werten $f_1(s)$ um

$$f_2(s) = \sum_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_r^2}\right)^2 \cdot a_r \cdot p_r(s).$$

Das ist also der zweite Fehler. Wir fahren genau so fort und erhalten in Übereinstimmung mit der Rechnung für die trigonometrischen Funktionen für den n^{ten} Fehler:

$$f_n(s) = \sum_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_r^2}\right)^n \cdot a_r \cdot p_r(s).$$

Wir hatten vorausgesetzt, daß die Reihe für $g(s)$ gleichmäßig konvergiert; ist dies der Fall, so geht in der Tat der Fehler gleichmäßig gegen Null, d. h. unser Verfahren konvergiert gleichmäßig, wenn der kleinste der Eigenwerte größer ist als $\frac{1}{2} (\lambda_0^2 > \frac{1}{2})$. Diese letzte Bedingung ist nun unwesentlich, denn es kann immer nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten geben, die kleiner sind als $\frac{1}{2}$. Diese können ermittelt werden und die betreffenden ersten Glieder der Fourierreihe von $g(s)$ abgezogen werden, so daß die Reihe für $g(s)$ erst mit dem Gliede beginnt, für das $\lambda_0^2 > \frac{1}{2}$ ist. Für Gebiete, die sich von einem Kreise nicht zu sehr

unterscheiden, tritt dieser Fall überhaupt nicht ein; denn für den Kreis ist, wie wir oben sahen, $\lambda_0^2 = 1$, also für nahezu kreisförmige Gebiete aus Gründen der Stetigkeit jedenfalls auch $\lambda_0^2 > \frac{1}{2}$.

Die wesentliche Frage bleibt nun die Frage nach der Entwickelbarkeit der gegebenen Randwerte in eine Reihe nach den Eigenfunktionen $p_r(s)$.

Was diese Frage angeht, so ist es mir nicht gelungen, die Möglichkeit der Entwicklung nachzuweisen, etwa in dem Umfang, der für die trigonometrischen Funktionen gilt. Dies wird sich auch nicht als notwendig erweisen, würde auch nicht zu dem allgemeinsten Falle führen, in dem das Verfahren noch konvergiert.

Wir werden hier zunächst einen wichtigen Spezialfall betrachten, der uns dann zu dem Hauptsatze führt, daß nämlich jedenfalls das mittlere Quadrat des Fehlers unserer Näherungen auf der Randkurve mit wachsendem n gegen Null geht. Daraus können wir mit Hilfe eines Satzes von Kellogg schließen, daß unser Verfahren wenigstens für jedes Gebiet gleichmäßig konvergiert, das ganz im Innern der Randkurve R liegt.

Der Spezialfall, um den es sich handelt, lautet: Läßt sich die Potentialfunktion mit den Werten $g(s)$ auf R über diese Randkurve hinaus bis an den Kreis K eindeutig fortsetzen, und sind ihre Werte auf $K: j(t)$ stetig, so läßt sich $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $p_r(s)$ entwickeln.

Der Beweis dieses Satzes ist nicht schwierig. Sind nämlich $g(s)$ die Werte auf der Randkurve R und $j(t)$ die Werte der Potentialfunktion auf dem Kreise K , so ist:

$$g(s) = \int N(s, t) \cdot j(t) \cdot dt.$$

Die Möglichkeit, $g(s)$ in der Form $\int N(s, t) \cdot j(t) \cdot dt$ darzustellen, ist nun nach Schmidt*) hinreichend, um $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $p_r(s)$ zu entwickeln. Damit ist der genannte Spezialfall bewiesen.

Um ein weiteres, wichtiges Resultat zu erhalten, benutzen wir den (etwas erweiterten) *Satz von Runge***), daß jede Potentialfunktion in einem Regularitätsgebiet durch Potentialpolynome ($\sum p^r(a_r \cos \nu \theta + b_r \sin \nu \theta)$) mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden kann. Für solche Rand-

*) Schmidt a. a. O. S. 464.

**) C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Acta math. IV, 1885.

Daß die Approximation durch Polynome bei solchen Randkurven, wie wir sie hier betrachten und bei stetigen Randwerten auch auf dem Rande noch gleichmäßig ist, erkennt man folgendermaßen: Man denke sich die Neumannsche Integralgleichung

kurven, wie wir sie hier voraussetzen und für stetige Randwerte kann der Satz dahin erweitert werden, daß die Approximation im ganzen Gebiete mit Einschluß des Randes gleichmäßig ist. Haben wir jetzt stetige Randwerte $g(s)$, so können wir zunächst Potentialpolynome finden, durch die diese Randwerte mit einer beliebigen vorgegebenen Genauigkeit approximiert werden. Die Randwerte $g(s)$ dieser Approximation können nun in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den $p_r(s)$ entwickelt werden. Das heißt aber, daß wir unter den für die Randkurve gemachten Voraussetzungen jede stetige Funktion $g(s)$ mit beliebiger Genauigkeit durch lineare Aggregate der Eigenfunktionen $p_r(s)$ approximieren können.

Daraus kann man natürlich noch nicht auf die Entwickelbarkeit stetiger Funktionen in eine Reihe $\sum_0^\infty a_r p_r(s)$ schließen, wo

$$a_r = \int g(s) \cdot p_r(s) \cdot ds$$

ist. Wir können aber eine für das folgende wichtige Folgerung ziehen. Sind

$$a_r = \int g(s) \cdot p_r(s) \cdot ds \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

die Fourierschen Koeffizienten der Funktion $g(s)$, so ist:

$$\int g^2(s) \cdot ds = \sum_0^\infty a_r^2,$$

d. h. das Integral über das Quadrat einer stetigen Funktion ist gleich der Summe der Quadrate der Fourierkoeffizienten. Die Differenz

gelöst; nun ziehe man um das gegebene Gebiet in sehr geringem Abstande eine umschließende Kurve und erzeuge mit der Neumannschen Belegung eine Potentialfunktion, indem man diese Belegung statt auf der wirklichen Randkurve auf der umschließenden Nachbarkurve anbringt. Man zeigt in derselben Weise, in der die Stetigkeit einer durch eine Belegung erzeugten Potentialfunktion bewiesen wird, daß diese Potentialfunktion gleichmäßig in die gesuchte Potentialfunktion übergeht, wenn die umschließende Nachbarkurve sich gleichmäßig der eigentlichen Randkurve nähert. Will man nun eine Funktion auch auf dem Rande mit der vorgegebenen Genauigkeit ϵ durch Potentialpolynome approximieren, so legt man die Nachbarkurve so nahe, daß die von ihr erzeugte Potentialfunktion sich nur um $\frac{\epsilon}{2}$ von der zu approximierenden unterscheidet. Diese „Nachbarfunktion“ läßt sich nun nach dem Runge'schen Satze gleichmäßig mit der Genauigkeit $\frac{\epsilon}{2}$ in jedem Gebiet approximieren, das ganz innerhalb der Nachbarkurve liegt, also auch auf der Randkurve R des gegebenen Gebietes. Damit ist offenbar die Approximation der Potentialfunktion gleichmäßig auch mit Einschluß der Begrenzung unseres Gebietes erzielt, w. z. b. w.

$$\int g^2(s) \cdot ds - \sum_0^\infty a_r^2$$

ist nämlich das Integral über das Fehlerquadrat:

$$\int \left\{ g(s) - \sum_0^\infty a_r \cdot p_r(s) \right\}^2 \cdot ds.$$

Die a_r sind aber so bestimmt, daß dieses Integral ein Minimum wird. Da man nun $g(s)$ durch hinreichend viele $p_r(s)$ mit beliebiger Genauigkeit approximieren kann, wodurch das Fehlerquadrat auch beliebig klein wird, so muß, wenn n über alle Grenzen wächst, das mittlere Fehlerquadrat gegen Null gehen, da es kleiner sein muß als eine Größe, die beliebig klein gemacht werden kann.*)

Es seien jetzt die Fourierkoeffizienten des n^{ten} Fehlers

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, a_4^{(n)}, \dots, a_r^{(n)} = \int f_n(s) \cdot p_r(s) \cdot ds$$

dann ist der $n+1^{\text{te}}$ Fehler auf der Randkurve R :

$$f_{n+1}(s) = f_n(s) - \int K(s, t) \cdot f_n(t) \cdot dt,$$

also sind die Fourierkoeffizienten des $n+1^{\text{ten}}$ Fehlers:

$$a_r^{(n+1)} = \int f_n(s) \cdot p_r(s) \cdot ds - \int \int K(s, t) \cdot f_n(t) \cdot p_r(s) \cdot ds \cdot dt.$$

Da $K(s, t)$ symmetrisch ist, können wir hier auf der rechten Seite nach s integrieren $\int K(s, t) \cdot p_r(s) \cdot ds = \frac{1}{2\pi} p_r(t)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} a_r^{(n+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right) \cdot a_r^{(n)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot a_r^{(n-1)} \\ &\quad \vdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \cdot a_r. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für das mittlere Quadrat des n^{ten} Fehlers die Formel:

$$\int f_n^2(s) \cdot ds = \sum_0^\infty \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \cdot a_r^2,$$

wo die a ohne oberen Index die Fourierkoeffizienten der gegebenen Randwerte $g(s)$ sind.

*) Da dies für alle stetigen Funktionen gilt, gilt es auch für alle Funktionen, die durch stetige Funktionen in der Weise approximiert werden können, daß das mittlere Quadrat des Fehlers beliebig klein wird. Siehe die Bemerkung am Schlusse des Abschnitts.

Da die Reihe aus den Quadraten der Fourierkoeffizienten $\sum_0^\infty a_n^2$ stets konvergiert, wenn das Integral $\int g^2(s) \cdot ds$ existiert, so erhalten wir das wichtige Resultat:

Das mittlere Quadrat des n^{th} Fehlers geht mit wachsendem n gegen Null!

Die oben gemachte Bemerkung bezüglich der kleinsten Eigenwerte gilt auch hier; wir denken uns für die Eigenwerte $\lambda^2 \leq \frac{1}{2}$ die Eigenfunktionen ermittelt und die entsprechenden Glieder der Fourierschen Entwicklung von vornherein von $g(s)$ abgezogen.

Damit wäre der Hauptteil des Beweises erledigt. Im übrigen können wir uns auf einen Satz von Kellogg berufen, der die Ableitung der Greenschen Funktion betrifft.

Um im Innern unseres ursprünglich gegebenen Gebietes G den Fehler der n^{th} Näherung abzuschätzen, stellen wir den Fehler der n^{th} Näherung im Innern von G durch die zu G gehörige Greensche Funktion dar. Bezeichnen wir diese mit $\theta(xy, \sigma)$, so ist $f_n(x, y)$ innerhalb von G durch das über die Randkurve R zu erstreckende Integral:

$$f_n(xy) = \frac{1}{2\pi} \int f_n(\sigma) \frac{\partial \theta(xy, \sigma)}{\partial n_\alpha} d\sigma$$

gegeben. Nach der Schwarzschen Ungleichung wird:

$$f_n^2(xy) \leq \frac{1}{4\pi^2} \int f_n^2(\sigma) d\sigma \int \left| \frac{\partial \theta(xy, \sigma)}{\partial n_\alpha} \right|^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 ds.$$

Von dem ersten dieser Integrale haben wir eben gezeigt, daß es mit wachsendem n gegen Null geht. Es bleibt noch übrig, zu zeigen, daß das zweite Integral endlich bleibt, und das leistet gerade der genannte Satz von Kellogg. Auf die Greensche Funktion angewendet besagen die Resultate von Kellogg, daß die Normalableitung der Greenschen Funktion endlich bleibt an Punkten, wo die Randkurve einen von Null verschiedenen Krümmungsradius hat. Schafft man die Ecken durch konforme

Abbildung von der Form $(z - z_0)^\alpha$ fort, so erkennt man, daß die Normalableitung an ausspringenden Ecken verschwindet; an einspringenden Ecken wird sie unendlich wie $\frac{1}{(z - z_0)^{1-\alpha}}$, wo $\alpha\pi$ der Winkel der die Ecke bildenden Tangenten ist. Das Integral $\int \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 ds$ konvergiert demnach, solange nicht einspringende Ecken vom äußeren Winkel Null auftreten. Diesen Fall schließen wir zunächst aus. Nehmen wir nun irgend ein Ge-

biet G^* ganz im Innern von G , so bleibt das Integral $\int \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)^2 \left(\frac{ds}{ds} \right)^2 ds$ für G^* unterhalb einer oberen Grenze, die wir mit M^2 bezeichnen wollen, und es wird:

$$f_n(xy) \leq \frac{1}{2\pi} M \cdot \sqrt{\int f_n^2(s) ds}.$$

Das heißt aber: Für jedes Gebiet G^* , das ganz im Innern des gegebenen Gebietes G liegt, konvergiert unser Verfahren gleichmäßig, w. z. b. w.

Für den Fall, daß die Randkurve eine einspringende Ecke vom Winkel Null hat, muß, damit die Abschätzung des Fehlers das gleiche Resultat liefert, die Zuordnung der Punkte von R zu den Punkten des umschließenden Kreises K so eingerichtet werden, daß das Produkt $\frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{ds}{ds}$ endlich bleibt, d. h. es muß $\frac{ds}{ds}$ null sein. Man erreicht dies z. B. dadurch, daß man die Zuordnung so wählt, daß beim Wegschaffen der einspringenden Ecke durch eine konforme Abbildung von der Form $(z - z_0)^\alpha$ eine gleichmäßige Einteilung auf R einer gleichmäßigen Einteilung auf K entspricht.

Hiermit ist der Konvergenzbeweis abgeschlossen. Als eine wichtige Erweiterung möchte ich noch hinzufügen, daß das Beweisverfahren nicht verlangt, daß die Randwerte, für die die Randwertaufgabe zu lösen ist, stetig sind. Es genügt, daß die gegebenen Randwerte sich durch stetige Funktionen so annähern lassen, daß das mittlere Fehlerquadrat der Annäherung beliebig klein wird. Hierin sind alle praktisch vorkommenden Fälle enthalten.

§ 5. Fast kreisförmige Gebiete, Formeln. Gebiete, die von einem Punkte konvex sind.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die für die Durchführung der Rechnung nötigen Formeln aufzustellen, wobei wir uns auf Gebiete beschränken, die, von dem Mittelpunkt des umschließenden Kreises aus gesehen, konvex sind. Die Zuordnung der Punkte der Randkurve zu den Punkten des umschließenden Kreises K erfolgt wieder in der Weise, daß solche Punkte einander zugeordnet werden, die auf gleichen Radien liegen (Figur 1). Es wird also $s = \theta$.

Die Normalableitung der Greenschen Funktion für den Kreis finden wir zu:

$$N(\rho \theta, t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \rho^r (\cos r\theta \cos rt + \sin r\theta \sin rt).$$

Daraus ergibt sich für den symmetrischen Kern $K(\rho \theta, t)$

$$\begin{aligned}
 K(\rho\theta, t) &= \int_0^{2\pi} N(\rho\theta, r) N(rt) dr \\
 &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \rho^r(\theta) \rho^r(t) (\cos \nu\theta \cos \nu t + \sin \nu\theta \sin \nu t) \\
 K(s, t) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \bar{\rho}^r(s) \rho^r(t) \{ \cos \nu s \cos \nu t + \sin \nu s \sin \nu t \},
 \end{aligned}$$

wo $\bar{\rho}(t)$ den Radiusvektor des Punktes $\theta = t$ auf der Randkurve R bedeutet.

Ist jetzt $f_n(s)$ der Fehler der n^{ten} Näherung, so erhalten wir die dazugehörige n^{te} Korrektion:

$$\begin{aligned}
 k_n(\rho\theta) &= \int K(\rho\theta, t) f_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) dt + \sum_1^{\infty} \left(\rho^r \cos \nu\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho^r(t) \cos \nu t f_n(t) dt \right. \\
 &\quad \left. + \rho^r \sin \nu\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}^r(t) \sin \nu t f_n(t) dt \right).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die n^{te} Korrektion als Potenzreihe, deren Koeffizienten durch die Integrale:

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}^r(t) \cos \nu t f_n(t) dt, \quad b_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}^r(t) \sin \nu t f_n(t) dt$$

gegeben sind.

Die Form dieser bestimmten Integrale ist nun von wesentlichem Interesse; sie sind nämlich genau so gebildet wie die Fourierkoeffizienten bei der Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis; d. h. der Koeffizient von $\rho^r \cos \nu\theta$ und $\rho^r \sin \nu\theta$ wird gefunden, indem man für das Produkt $f_n(t) \cdot \bar{\rho}^r(t) \cos \nu t$ und $f_n(t) \bar{\rho}^r(t) \sin \nu t$ das Integral über die Randkurve R bildet.

Wir erhalten also das einfache Resultat: Wollen wir für gegebene Randwerte $g(s)$ die Randwertaufgabe lösen, so bilden wir die erste Näherung so, als ob unsere Randkurve R ein Kreis wäre, indem wir in der Potenzreihenentwicklung

$$g_1(\rho\theta) = \sum_0^{\infty} (a_r \rho^r \cos \nu\theta + b_r \rho^r \sin \nu\theta)$$

die Koeffizienten nach Art der Fourierkoeffizienten durch die über die Randkurven zu nehmenden Integrale

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t) dt, \quad a_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \varphi^v(t) \cos vt dt,$$

$$b_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \bar{\varphi}^v(t) \sin vt dt$$

bestimmen. Es bleibt ein Fehler stehen, der in genau der gleichen Weise behandelt wird, wie die ursprüngliche Randwertaufgabe, usw. Die Konvergenz des Verfahrens haben wir oben dargetan.

Praktisch wird man meist die bestimmten Integrale durch Summen über $2n$ äquidistante Punkte ersetzen; man erhält dann als Resultat dasjenige Polynom n^{ten} Grades, das an diesen $2n$ Punkten die dort vorgeschriebenen Werte annimmt.

Schlußbemerkung. Weitere Verwendbarkeit des Verfahrens.

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, ist das vorstehend angegebene Verfahren einer großen Ausdehnung fähig. Zunächst ist zu bemerken, daß es ohne weiteres auf den Raum, also auf fast kugelförmige Gebiete übertragbar ist, denn es sind in den Beweisen nur die Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen und aus der Potentialtheorie benutzt worden, die auch für mehrere Dimensionen gültig sind.

Ferner kann das Verfahren auf andere Gebiete als den Kreis angewendet werden, z. B. auf fast quadratische Gebiete, wie überhaupt auf Näherungsgebiete zu Gebieten, deren Greensche Funktion bekannt ist. (Nicht einmal das ist nötig, es genügt, wenn die Greensche Funktion näherungsweise bekannt ist — in unserem Beweis ist die Eigenschaft von $N(xy, t)$ als Normalableitung der Greenschen Funktion für den Kreis nirgends wesentlich benutzt worden.)

Drittens kann das Verfahren auf andere Differentialgleichungen vom elliptischen Typus angewendet werden. Der Konvergenzbeweis ist auf alle Fälle direkt übertragbar, in denen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

Es muß sich die gesuchte Funktion durch eine Summe von Funktionen, die der betreffenden Differentialgleichung genügen, mit beliebiger Genauigkeit annähern lassen — diese Funktionen müssen bis an den Kreis heran stetig sein.

Ferner müssen für eine Reihe von Funktionen, deren mittleres Quadrat auf dem Rande eines Gebietes gegen Null geht, die Funktionen im Innern

$$\begin{aligned}
 K(\varrho\vartheta, t) &= \int_0^{2\pi} N(\varrho\vartheta, r) N(tr) dr \\
 &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \varrho^r(\vartheta) \varrho^r(t) (\cos \nu\vartheta \cos \nu t + \sin \nu\vartheta \sin \nu t) \\
 K(s, t) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \bar{\varrho}(s) \varrho^r(t) \{ \cos \nu s \cos \nu t + \sin \nu s \sin \nu t \},
 \end{aligned}$$

wo $\bar{\varrho}(t)$ den Radiusvektor des Punktes $\vartheta = t$ auf der Randkurve R bedeutet.

Ist jetzt $f_n(s)$ der Fehler der n^{ten} Näherung, so erhalten wir die dazugehörige n^{te} Korrektion:

$$\begin{aligned}
 k_n(\varrho\vartheta) &= \int K(\varrho\vartheta, t) f_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) dt + \sum_1^{\infty} \left(\varrho^r \cos \nu\vartheta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho^r(t) \cos \nu t f_n(t) dt \right. \\
 &\quad \left. + \varrho^r \sin \nu\vartheta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\varrho}(t) \sin \nu t f_n(t) dt \right).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die n^{te} Korrektion als Potenzreihe, deren Koeffizienten durch die Integrale:

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho^r(t) \cos \nu t f_n(t) dt, \quad b_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\varrho}(t) \sin \nu t f_n(t) dt$$

gegeben sind.

Die Form dieser bestimmten Integrale ist nun von wesentlichem Interesse; sie sind nämlich genau so gebildet wie die Fourierkoeffizienten bei der Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis: d. h. der Koeffizient von $\varrho^r \cos \nu\vartheta$ und $\varrho^r \sin \nu\vartheta$ wird gefunden, indem man für das Produkt $f_n(t) \cdot \bar{\varrho}(t) \cos \nu t$ und $f_n(t) \bar{\varrho}(t) \sin \nu t$ das Integral über die Randkurve R bildet.

Wir erhalten also das einfache Resultat: Wollen wir für gegebene Randwerte $g(s)$ die Randwertaufgabe lösen, so bilden wir die erste Näherung so, als ob unsere Randkurve R ein Kreis wäre, indem wir in der Potenzreihenentwicklung

$$g_1(\varrho\vartheta) = \sum_0^{\infty} (a_r \varrho^r \cos \nu\vartheta + b_r \varrho^r \sin \nu\vartheta)$$

die Koeffizienten nach Art der Fourierkoeffizienten durch die über die Randkurven zu nehmenden Integrale

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t) dt, \quad a_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \varrho'(t) \cos vt dt,$$

$$b_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \varrho'(t) \sin vt dt$$

bestimmen. Es bleibt ein Fehler stehen, der in genau der gleichen Weise behandelt wird, wie die ursprüngliche Randwertaufgabe, usw. Die Konvergenz des Verfahrens haben wir oben dargetan.

Praktisch wird man meist die bestimmten Integrale durch Summen über $2n$ äquidistante Punkte ersetzen; man erhält dann als Resultat dasjenige Polynom n^{ten} Grades, das an diesen $2n$ Punkten die dort vorgeschriebenen Werte annimmt.

Schlußbemerkung. Weitere Verwendbarkeit des Verfahrens.

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, ist das vorstehend angegebene Verfahren einer großen Ausdehnung fähig. Zunächst ist zu bemerken, daß es ohne weiteres auf den Raum, also auf fast kugelförmige Gebiete übertragbar ist, denn es sind in den Beweisen nur die Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen und aus der Potentialtheorie benutzt worden, die auch für mehrere Dimensionen gültig sind.

Ferner kann das Verfahren auf andere Gebiete als den Kreis angewendet werden, z. B. auf fast quadratische Gebiete, wie überhaupt auf Näherungsgebiete zu Gebieten, deren Greensche Funktion bekannt ist. (Nicht einmal das ist nötig, es genügt, wenn die Greensche Funktion näherungsweise bekannt ist — in unserem Beweis ist die Eigenschaft von $N(xy, t)$ als Normalableitung der Greenschen Funktion für den Kreis nirgends wesentlich benutzt worden.)

Drittens kann das Verfahren auf andere Differentialgleichungen vom elliptischen Typus angewendet werden. Der Konvergenzbeweis ist auf alle Fälle direkt übertragbar, in denen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

Es muß sich die gesuchte Funktion durch eine Summe von Funktionen, die der betreffenden Differentialgleichung genügen, mit beliebiger Genauigkeit annähern lassen — diese Funktionen müssen bis an den Kreis heran stetig sein.

Ferner müssen für eine Reihe von Funktionen, deren mittleres Quadrat auf dem Rande eines Gebietes gegen Null geht, die Funktionen im Innern

des Gebietes gleichmäßig gegen Null gehen, was im wesentlichen eine Forderung für die Normalableitung der Greenschen Funktion bedeutet. (Vgl. S. 257, Kellogsscher Satz.)

Von besonderem Interesse ist die Übertragung des Verfahrens auf die Gleichung $\Delta\Delta u = 0$. Ich will hier auf die Einzelheiten der Beweisführung nicht eingehen. Es genügen auch hier die genannten beiden Bedingungen, mit der Abänderung, die sich sinngemäß daraus ergibt, daß nicht nur die Randwerte der Funktion selbst, sondern auch ihrer Normalableitung gegeben sind. Die erste der genannten Bedingungen ist nun sicher zu erfüllen, denn man kann jede Funktion, die der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt, durch Potentialfunktionen in der Form $\varphi_1 + r^3 \varphi_2$ darstellen, womit die Möglichkeit dargetan ist, die Lösung durch Polynome darzustellen, die dieser Gleichung genügen. Die zweite Bedingung läßt nun eine interessante mechanische Deutung zu: Betrachtet man nämlich die Lösung der Gleichung als Spannungsfunktion in dem ebenen Falle der Elastizitätstheorie, so lautet die zweite Bedingung, ins mechanische übertragen: Wirken äußere Kräfte, deren mittleres Quadrat gegen Null geht, so müssen, wenn das Verfahren konvergieren soll, mit dem mittleren Quadrat der äußeren Kräfte auch die Spannungen im Innern gegen Null gehen und zwar gleichmäßig in jedem ganz im Innern liegenden Bereich. Diese Forderung ist nun mit dem sogenannten de Saint-Venantschen Prinzip nahe verwandt, und ist in jenem enthalten, wenn man wenigstens das Prinzip mathematisch klar formuliert, sodaß man sagen kann, daß bei der Voraussetzung der Gültigkeit des de Saint-Venantschen Prinzips auch unser Verfahren konvergiert.

Die Schwierigkeit des Konvergenzbeweises fällt ganz fort, sobald man sich bei der Entwicklung nach bestimmten Funktionen auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränkt. Man erhält dann stets eine Funktion, die an vorgegebenen Punkten die verlangten Randwerte annimmt.

Über das Fourierintegral $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx dx.$

Von

FELIX BERNSTEIN in Göttingen.

Das Fourierintegral $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx dx$ besitzt bekanntlich den Wert $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t^2}{4}}$, ist also beständig positiv für reelle Werte der Variablen. Es läge nahe, ein gleiches für das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx dx$ zu vermuten.*)

In Wirklichkeit verhält es sich aber anders, als gedacht werden könnte, es besteht der Satz:

I. Das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx dx$, allgemeiner das Integral

$$J_q = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx dx \quad (q = \text{ganze positive Zahl} + 1)$$

nimmt oberhalb jeder festen Grenze T immer wieder negative Werte an.

*.) Die berührte Frage hängt aufs engste und umkehrbar zusammen mit der Frage nach der reellen Auflösbarkeit der Integralgleichung

$$(a) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) dy,$$

mit der sich C. Runge und Polya beschäftigt haben (vgl. Math. Ann. Bd. 75, S. 130 u. S. 376). Sind nämlich $F(x)$ und $f(x)$ zwei reelle durch die Gleichung (a) verbundene Funktionen, so besteht unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz beider Seiten die weitere Identität

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos tx dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos tx dx \right)^2,$$

deren linke Seite also negative Werte nicht annehmen kann. Eine reelle Lösung $f(x)$, welche ein abs. konvergentes Fourierintegral besitzt, kann also schon bei gegebenem $F(x) = e^{-x^2}$ nach I. nicht existieren.

Der Beweis der ausgesprochenen Behauptung ergibt sich mittels einer Methode, die der des berühmten Beweises nachgebildet ist, den G. H. Hardy*) für das Vorhandensein unendlich vieler Nullstellen (ungerader Ordnung) der Zetafunktion von der Abszisse $\frac{1}{2}$ geführt hat. Da die genannte Methode noch wenig bekannt ist, dürfte eine ausführliche Darstellung des Beweises nicht ohne Interesse sein.

Es sei $f(t)$ für $0 \leq t < \infty$ eine eindeutige stetige reelle Funktion, für welche

$$(A) \quad \text{das Integral } \int_0^\infty f(t)t^p dt \text{ für jedes } p > 0 \text{ existiert,}$$

und für welche

$$(B) \quad f(t) \geq 0 \text{ für alle } t \text{ des Intervalls } (0, \dots, \infty)$$

gilt wobei das Gleichheitszeichen für $t < T_0$ beliebig, für $t > T_0$ aber nur für eine Nullmenge gilt, so daß das Integral der Funktion auf *keinem* Intervall (a, b) ($T_0 \leq a \leq b \leq \infty$) verschwindet.

Dann gilt der Satz:

I. Es gibt zu jedem (noch so großem) positivem $T > T_0$ ein zugehöriges P , so daß die Ungleichung

$$(1) \quad \int_0^T f(t)t^p dt < \int_T^\infty f(t)t^p dt$$

für alle $p > P$ erfüllt ist.

Denn ersetzen wir, nach dem ersten Mittelwertsatz, die linke Seite J_1 der Ungleichung durch

$$(2) \quad J_1 = (T \cdot \theta)^p \int_0^T f(t) dt < T^p \int_0^T f(t) dt = T^p K \quad (K \geq 0), \quad 0 < \theta < 1,$$

die rechte Seite J_2 durch den kleineren Wert

$$(3) \quad J_2 = \int_{\frac{3}{2}T}^{2T+1} f(t)t^p dt = (2T + \theta)^p \int_{\frac{3}{2}T}^{2T+1} f(t) dt < (2T)^p K' \quad 0 < \theta < 1 (K' > 0),$$

so daß

$$(4) \quad J_1 < T^p K; \quad (2T)^p K' < J_2 < J_1$$

folgt, und wählen wir, was zufolge $K' > 0$ möglich ist, P so, daß für alle $p > P$

$$(5) \quad T^p K < (2T)^p K'$$

ist, so ist vermöge (4) unsere Behauptung erwiesen.

*) C. R. hebd. d. s. de l'Ac. d. Sc. Paris 158 (1914), S. 1012—1014, vgl. E. Landau, Math. Ann. Bd. 76, Heft 2, S. 218—243.

Es sei nunmehr $g(t)$ eine für $0 < t < \infty$ eindeutige stetige reelle Funktion, welche die obige Bedingung (A) erfüllt, für welche aber anstelle von (B) die Bedingung (B') $g(t) \geq 0$ für alle t des Intervalls (T, \dots, ∞) tritt, wobei das Gleichheitszeichen wie oben, nur in einer Nullmenge höchstens des Intervalls (T, \dots, ∞) gelten soll. Hierbei darf $g(t)$ jetzt für $0 < t < T$ auch negativ sein.

Dann gilt der Satz

II. Es gibt zu jedem (noch so groß vorausgesetztem) T ein P , so daß für alle $p > P$ die Ungleichung

$$(6) \quad 0 < \int_0^T g(t) t^p dt \quad \text{erfüllt ist.}$$

In der Tat ist einerseits

$$(7) \quad \left| \int_0^T g(t) t^p dt \right| \leq \int_0^T |g(t)| t^p dt.$$

Andrerseits ist vermöge I. für die positive, nur in einer Nullmenge höchstens verschwindende Funktion $|g(t)|$ für ein hinreichend großes P

$$(8) \quad \int_0^T g(t) |t^p| dt < \int_T^\infty g(t) t^p dt, \quad \text{also}$$

$$(9) \quad \left| \int_0^T g(t) t^p dt \right| < \int_0^\infty g(t) t^p dt \quad \text{und daher}$$

$$(10) \quad \left| \int_0^T g(t) t^p dt + \int_0^T g(t) t^p dt \right| < \int_0^\infty g(t) t^p dt.$$

Die linke Seite ist positiv oder Null, so daß für alle $p > P$

$$(11) \quad 0 < \int_0^\infty g(t) t^p dt \quad \text{ist.}$$

Die soeben abgeleitete Bedingung (11) ist notwendige Bedingung dafür, daß eine gegebene Funktion $g(t)$, die der Bedingung (A) genügt, von einem gewissen T ab niemals negativ ist. Die entsprechenden Überlegungen für $-g(t)$ zeigen, daß

$$(12) \quad 0 > \int_0^\infty g(t) t^p dt$$

die Bedingung dafür ist, daß $g(t)$ von einem gewissen T ab niemals positiv ist. Es gilt daher der Satz:

III. Besitzt die unendliche Reihe der Momente (deren Existenz vorausgesetzt wird)

$$(13) \quad \int_0^\infty g(t) t^p dt \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

unendlich viele Zeichenwechsel, besüglich nimmt sie unendlich oft den Wert Null an, so besitzt die Funktion $g(t)$ oberhalb jeder Grenze T eine Nullstelle, und wechselt beim Durchgang durch dieselbe ihr Zeichen.

Nach diesen Vorbereitungen bemerken wir, unter q eine ganze positive Zahl verstanden, zunächst, daß die Funktion e^{-x^q} und ihre sämtlichen Ableitungen die Bedingungen des Fourierschen Umkehrtheorems erfüllen (da diese Funktionen endlich viele Maxima und Minima besitzen, und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrabel sind).*)

Setzen wir jetzt

$$(13) \quad g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-x^q} \cos tx dx$$

und bedenken, daß vermöge des Fouriertheorems für jedes x , und daher auch für $x = 0$

$$(14) \quad \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^q}) = \int_0^\infty g(t) t^n \cos tx dt$$

wird, so ist die Existenz der Momente (13) für die Funktion $g(t)$ gesichert.

Ihre Berechnung erfolgt direkt aus der Formel (14) für $n = 0$, indem wir beide Seiten nach Potenzen von x entwickeln:

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2qn}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \int_0^\infty g(t) t^{2m} dt$$

durch Vergleich der Potenzen, in der Form

$$(a) \quad \int_0^\infty g(t) t^{2m} dt = (-1)^{m(q-1)} \frac{(2m)!}{n!} \quad \text{für } m = qn,$$

$$(b) \quad \int_0^\infty g(t) t^{2m} dt = 0 \quad \text{für } m \neq qn.$$

Im Falle $q = 1$ und nur in diesem kommt (b) in Fortfall und sind zugleich alle Momente der Reihe (a) positiv. Im Falle $q > 1$ besitzt daher die analytische Funktion $g(t)$ oberhalb jedes Wertes T nach III. unendlich viele Nullstellen und zwar von ungerader Ordnung.

*) Serret-Harnack, Bd. II, S. 378.

Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation.

Von

J. NIELSEN in Konstantinopel.

Eine endliche Anzahl n von erzeugenden Operationen a_1, a_2, \dots, a_n , zwischen denen keine Relationen bestehen, definieren die allgemeine unendliche diskontinuierliche Gruppe G_n . Zwei Elemente dieser Gruppe sind nur dann identisch bzw. ineinander transformierbar, wenn die ihnen entsprechenden Ausdrücke in den a_i identisch sind, bzw. in zyklischer Anordnung geschrieben identisch werden. Wählt man n Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der Gruppe so aus, daß man jedes Element der Gruppe als Komposition aus ihnen darstellen kann, daß also hinsichtlich der Erzeugung der Gruppe das System der a_i durch das System der α_i ersetzt werden kann, so definiert ein solches zusammengehöriges System primitiver Elemente α_i eine isomorphe Beziehung von G_n auf sich selbst. Im folgenden wird eine Methode entwickelt, um in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob n vorgegebene Elemente aus G_n in dieser Weise ein isomorphes System bilden.

Die n Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des betrachteten Systems S aus G_n sind als Kompositionen der a_i gegeben, haben also die Form:

$$(1) \quad \alpha_i = a_{k_1}^{e_1} a_{k_2}^{e_2} \cdots a_{k_l}^{e_l},$$

wobei die Indizes k dem System der Indizes 1 bis n entnommen sind und die Exponenten e positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man aus den α_i durch Komposition die ganze Gruppe aufbauen kann, ist offenbar, daß man aus ihnen die ursprünglichen Erzeugenden a_i ausdrücken kann. Besteht also jedes α nur aus einer Erzeugenden a , so müssen die α_i eine Permutation der a_i sein, wobei noch jedes a mit dem Exponenten +1 oder -1 versehen sein darf. Kommen hingegen unter den α Kompositionen aus den a nach (1) vor, so gibt es Erzeugende a , die Kompositionen aus den α sind:

$$(2) \quad a_i = \alpha_{x_1}^{e_1} \alpha_{x_2}^{e_2} \cdots \alpha_{x_k}^{e_k}.$$

Schreibt man hierin für die α ihre Ausdrücke nach (1), so nimmt (2) die Gestalt einer identisch erfüllten Gleichung

$$\alpha_i = \Gamma_{i_1} \alpha_i \Gamma_{i_2}$$

an, wobei also die Γ_i Ausdrücke in den α sind, die sich durch Absorption ganz aufzehren. Jedes solche Γ enthält daher notwendig mehr als ein vollständiges Element α , und es muß unter diesen α -Elementen von Γ mindestens eins geben, das von seinen beiden Nachbarelementen (dem vorausgehenden oder dem nachfolgenden oder beiden zugleich, aber nicht mehr als diesen beiden) ganz absorbiert wird; sonst könnte Γ sich nicht selber ganz aufzehren. Sei α_μ dies Element, so muß es also eine Kombination $\alpha_r \alpha_u$ oder $\alpha_r^{-1} \alpha_u$ oder $\alpha_u \alpha_r$ oder $\alpha_u \alpha_r^{-1}$ geben, die weniger oder höchstens gleichviel Erzeugende enthält wie α_r . Setzt man in dem System S diese Kombination an Stelle von α_r , also:

$$\alpha_i' = \alpha_i \quad (\text{für } i \neq r)$$

$$\alpha_r' = \alpha_r \alpha_\mu \quad (\text{und analog}),$$

so ist S isomorph, wenn sich diese Eigenschaft von dem neu entstehenden System S' nachweisen läßt, und umgekehrt ist wegen

$$\alpha_i = \alpha_i' \quad (\text{für } i \neq r)$$

$$\alpha_r = \alpha_r' \alpha_\mu^{-1} \quad (\text{und analog})$$

das System S' isomorph, wenn dies mit S der Fall war. Das Verfahren läßt sich also mit S' fortsetzen, und man erhält in der so entstehenden Systemreihe schrittweise eine Verkleinerung der Erzeugendenzahl, so oft sich eine Kombination $\alpha_u^{\pm 1} \alpha_r^{\pm 1}$ finden läßt, die weniger Erzeugende enthält als der eine ihrer Bestandteile. Gibt es bei einem bestimmten System S keine solche Kombination, so muß es notwendig eine Kombination $\alpha_u^{\pm 1} \alpha_r^{\pm 1} \alpha_q^{\pm 1}$ derart geben, daß darin α_r je zur Hälfte von den Nachbarelementen absorbiert wird. Dann ordne man die Elemente von S derart in eine Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, daß kein Element mehr Erzeugende umfaßt, als ein späteres der Reihe. Sei nun etwa α_i das erste Element der Reihe, welches die Eigenschaft hat, zwischen zwei anderen je zur Hälfte absorbiert zu werden, so umfaßt α_i eine gerade Anzahl von Erzeugenden, und es sei

$$\alpha_i = A_i B_i$$

die Zerlegung in zwei Hälften. So oft dann ein anderes Element des Systems mit dem Bestandteil B_i endigt bzw. mit dem Bestandteil B_i^{-1} anfängt, bewirke man durch geeignete Kombination mit α_i , daß A_i^{-1} bzw. A_i an die Stelle tritt. Damit hat α_i die betrachtete Eigenschaft verloren, und keines der α_i vorausgehenden Elemente hat sie neu erworben, denn für diese kommen nur Anfangs- und Endbestandteile bis zur Erzeugendenzahl von A_i in Betracht, und solche sind keine neu entstanden, die nicht

schon in α_i vertreten waren. Läßt sich nach dieser Umformung des Systems, die die Isomorphieeigenschaft und die Erzeugendenzahl nicht ändert, noch keine Kombination finden, die zu einer Verringerung der Erzeugendenzahl führt, so muß es ein weiteres Element α_k ($k > i$) der Reihe geben, das zwischen zwei anderen je zur Hälfte absorbiert wird. Mit diesem verfahren man dann wie mit α_i und setze dies Verfahren fort, solange kein Element durch ein anderes mehr als zur Hälfte ausgelöscht wird. Da n endlich ist und der Index des zur Komposition verwendeten Elements dauernd wächst, ist dies Verfahren nicht unbegrenzt fortsetzbar. Es muß vielmehr, wenn S ein isomorphes System sein soll, der Fall einmal wieder auftreten, daß ein Element durch ein anderes mehr als zur Hälfte ausgelöscht wird. Also läßt sich durch dies Kompositionsverfahren die Erzeugendenzahl des Systems solange verkleinern, bis jedes der n Elemente nur noch aus einer Erzeugenden besteht. Man kann demnach die Lösung des gestellten Problems so formulieren:

Die n Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ aus G_n bilden dann und nur dann ein zusammengehöriges System primitiver Elemente, wenn sich nach bestimmter, oben dargelegter Methode in einer endlichen Zahl von Schritten durch Substitution von Kombinationen $\alpha_r^{\pm 1} \alpha_\mu^{\pm 1}$ an Stelle von α_μ die Erzeugendenzahl jedes Elements auf 1 reduzieren läßt und das so entstehende System eine Permutation der mit den Exponenten +1 oder -1 versehenen Erzeugenden $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ darstellt.

Bildet man für ein gegebenes System S die Determinante n^{ten} Grades

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

in welcher d_{ik} die algebraische Summe aller Exponenten der Erzeugenden α_k im Ausdruck von α_i bedeutet, so erkennt man nach dem Vorhergehenen unmittelbar, daß Δ für ein isomorphes System, dessen Elemente aus je einer Erzeugenden bestehen, den Wert +1 oder -1 hat. Bei der Substitution von $\alpha_r^{\pm 1} \alpha_\mu^{\pm 1}$ an Stelle von α_μ wird die r^{te} Zeile von Δ mit dem Faktor ± 1 zur μ^{ten} addiert; also ändert sich Δ nicht. Mithin folgt aus obigem Satze im besonderen als notwendige Bedingung für jedes zusammengehörige primitive System, daß $\Delta = \pm 1$ ist.

Bezeichnet man für ein n -zeiliges System die Operation, welche darin besteht, daß man die erste Zeile mit der i^{ten} vertauscht und alles übrige ungeändert läßt, mit $(1i)$, ferner die Operation, welche nur die erste Zeile mit -1 potenziert, mit A , endlich die Operation, welche an die erste Zeile die zweite anfügt und gleichzeitig die zweite mit -1 potenziert, mit B , so erkennt man, daß für das n -zeilige System der α_i die einzelnen

auszuführenden Kombinationen wie folgt erhalten werden (in jedem Falle sollen sich die von α_μ verschiedenen Elemente nicht ändern):

$$\begin{aligned}\alpha_\mu &\rightarrow \alpha_\mu^{-1} \quad \text{durch } (1\mu)A(1\mu) \\ \alpha_\mu &\rightarrow \alpha_\mu \alpha_\nu \quad \text{,,} \quad (1\nu)(12)(1\mu)B(1\mu)(12)A(1\nu) \\ \alpha_\mu &\rightarrow \alpha_\mu \alpha_\nu^{-1} \quad \text{,,} \quad (1\nu)A(12)(1\mu)B(1\mu)(12)(1\nu) \\ \alpha_\mu &\rightarrow \alpha_\nu \alpha_\mu \quad \text{,,} \quad (1\nu)A(12)(1\mu)ABA(1\mu)(12)(1\nu) \\ \alpha_\mu &\rightarrow \alpha_\nu^{-1} \alpha_\mu \quad \text{,,} \quad (1\nu)(12)(1\mu)ABA(1\mu)(12)A(1\nu).\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch, daß die $n - 1$ Operationen $(1i)$ ausreichen, um jede beliebige Permutation der a herzustellen, und daß jede der definierten Operationen, zweimal hintereinander ausgeführt, die Identität ergibt, so folgt der Satz:

Die Gruppe der Isomorphismen der unendlichen Gruppe mit n Erzeugenden ohne Relation läßt sich durch $n + 1$ erzeugende Operationen aufbauen; diese lassen sich insbesondere so wählen, daß sie alle von der Ordnung 2 sind.

So lassen sich z. B. alle Isomorphismen der Gruppe $G(a, b, c, d$, ohne Relation) erzeugen, indem man in geeigneter Reihenfolge die fünf isomorphen Substitutionen ausführt:

$$\left. \begin{array}{l} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \\ c \rightarrow e \\ d \rightarrow d \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} a \rightarrow c \\ b \rightarrow b \\ c \rightarrow a \\ d \rightarrow d \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} a \rightarrow d \\ b \rightarrow b \\ c \rightarrow c \\ d \rightarrow a \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} a \rightarrow a^{-1} \\ b \rightarrow b \\ c \rightarrow c \\ d \rightarrow d \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow b^{-1} \\ c \rightarrow c \\ d \rightarrow d \end{array} \right\}.$$

Der Weg zur *Darstellung* eines gegebenen Isomorphismus auf diese Weise ist zugleich durch die obige Methode zur *Auflösung* desselben gegeben.

Konstantinopel, im Juli 1918.

Beitrag zur Kleinschen Theorie des Ikosaeders.

Von

V. GEILEN in Münster i. W.

(Aus einem Schreiben an Herrn F. Klein.)

In meiner Dissertation, betitelt „Spiegelungs- und Drehungsgruppen in graphischer Behandlung“ (Göttingen 1916), habe ich auf Anregung des Herrn C. Runge und unter Verwendung einer von ihm gefundenen graphischen Methode, nach der die räumlichen Operationen der Spiegelung und Drehung eines Körpers, von dem ein Punkt festgehalten wird, in der Ebene dargestellt und zusammengesetzt werden können, — nähere Angaben und eine Darlegung der Methode enthält die Dissertation — die seit Ihrer Abhandlung „Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst“ im 9. Bande der „Mathematischen Annalen“ wohlbekannten Gruppen der regulären Körper durch einfache, elementargeometrische Konstruktionen in der schlichten Ebene in unmittelbar anschaulicher Weise hergeleitet.

Von den ebenen Gruppenbildern aus ergab sich nun sehr leicht der Übergang zu den algebraischen „Formen“ der regulären Körper; dabei stellten sich außer den bekannten Normalformen, wie sie in Ihren „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ hergeleitet und verwertet sind, eine Anzahl neuer Normalformen ein, die den übrigen, noch möglichen Normalstellungen der Körper zur Projektionsebene entsprechen und die mit Ausnahme der unten mit $W_{(8)}$ bezeichneten Form bisher unbeachtet geblieben sind.

Wenn diese neuen Normalformen auch durch gewisse lineare Transformationen aus den bekannten hervorgehen, so hoffe ich doch, daß sie in ihrer Gesamtheit als Ergänzung zu Ihrer Theorie des Ikosaeders des Interesses und des Nutzens nicht entbehren. Gehen doch aus den zwischen den neuen Formen bestehenden Identitäten neue kanonische Gestalten der Ikosaeder-Gleichung hervor. Dazu scheint die Behandlung der erwähnten Form $W_{(8)}$ durch Brioschi (s. u.) für den Wert der neuen Formen auch in funktionentheoretischer Richtung zu sprechen.

Die Herleitung der Formen beruht auf einem bemerkenswerten Zusammenhang der gnomonischen und der stereographischen Projektion, wie er geometrisch in der Runge'schen graphischen Darstellung der Spiegelungen und Drehungen verwertet ist: Jeder gnomonischen Geraden eines Gruppenbildes entspricht algebraisch eine leicht angebbare quadratische Form, deren Wurzelwerte das Paar der zu der Geraden gehörigen, stereographischen Punkte darstellen. So resultieren die Endformen der Körper einfach als Produkte quadratischer Formen, deren Linearfaktoren wir garnicht zu kennen brauchen. Dabei kann jede einzelne Form unabhängig von den übrigen derselben Gruppe und ohne Benutzung des Formalismus der Invariantentheorie abgeleitet werden. Vereinfachungen der Rechnung ergeben sich zudem aus der besonderen Gruppierung der Geraden in den Diagrammen.*)

Die Bezeichnung der Formen habe ich abweichend von der üblichen, invariantentheoretischen Benennung so wählen zu dürfen geglaubt, daß sie an die zugehörigen Körper erinnert. Beim Dieder wird eine Polar- und eine Äquatorialstellung unterschieden, je nachdem die Haupt- oder eine Nebenachse in der Projektionsachse liegt, und die Bezeichnung „Halb“, „Drittel“- usw. -Stellung soll andeuten, daß eine zwei-, drei-, usw. -zählige Symmetriearchse des Körpers in die Achse der Projektion fällt.

Der Kürze wegen will ich bei der Aufzählung der Formen die inhomogene Schreibweise anwenden und zum Vergleich die bekannten Formen mit einfügen.

Tabelle der Formen.

I. Die Formensysteme der Dieder

a) in Polarstellung.

$$P_{(n)} = \varepsilon$$

$$D_{(n)} = \varepsilon^n - 1$$

$$D'_{(n)} = \varepsilon^n + 1$$

$$4 P_{(n)}^2 + D_{(n)}^2 - D'_{(n)}^2 \equiv 0$$

(„Vorlesungen über das Ikosaeder“, S. 49).

*.) Die ausführliche Herleitung der Formen hat im Dezember 1917 der phil.-naturw. Fakultät der Universität zu Münster i. W. als Habilitationsschrift vorgelegen und wird demnächst im Druck erscheinen.

b) in Äquatorialstellung.

$$P_{(n)} = z^2 + 1$$

$$D_{(3)} = z(z^2 - 3); \quad D'_{(3)} = z^2 - \frac{1}{3}$$

$$D_{(4)} = z^4 - 6z^2 + 1; \quad D'_{(4)} = z(z^2 - 1)$$

$$D_{(5)} = z(z^4 - 10z^2 + 5); \quad D'_{(5)} = z^4 - 2z^2 + \frac{1}{5}$$

$$D_{(6)} = z^6 - 15z^4 + 15z^2 + 1; \quad D'_{(6)} = z\left(z^4 - \frac{10}{3}z^2 + 1\right)$$

$$P_{(n)} - D_{(n)}^2 - n^2 \cdot D'_{(n)}^2 \equiv 0.$$

II. Die Formensysteme des Tetraeders

a) in Drittelstellung.

$$T_{(3)} = z(z^3 + 2\sqrt{2})$$

$$T'_{(3)} = z^3 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$V_{(3)} = z^6 - 5\sqrt{2}z^3 - 1$$

$$V_{(3)}^2 + 16\sqrt{2} \cdot T_{(3)}^3 - T'_{(3)}^3 \equiv 0$$

b) in Halbstellung.

$$T_{(2)} = z^4 - 2\sqrt{3} \cdot z^2 - 1$$

$$T'_{(2)} = z^4 + 2\sqrt{3} \cdot z^2 - 1$$

$$V_{(2)} = z(z^4 + 1)$$

$$12\sqrt{3} \cdot V_{(2)}^2 - T_{(2)}^3 + T'_{(2)}^3 \equiv 0$$

(„Ikosaeder“, S. 51).

Bemerkung: Die Irrationalitäten in den Koeffizienten der Formen lassen sich bei homogener Schreibweise hier und im folgenden durch eine Substitution $z_2 = \sqrt{a} \cdot z_2'$, in der Gruppe IV, c durch: $z_2^2 = \sqrt{5} \cdot z_2'$ beseitigen.

III. Die Formensysteme des Oktaeders

a) in Viertelstellung.

$$O_{(4)} = z(z^4 - 1)$$

$$W_{(4)} = z^8 + 14z^4 + 1$$

$$R_{(4)} = z^{12} - 33(z^8 + z^4) + 1$$

$$108 O_{(4)}^4 - W_{(4)}^3 + R_{(4)}^2 \equiv 0$$

(„Ikosaeder“ S. 54).

b) in Drittelstellung.

$$O_{(3)} = z^6 + 5\sqrt{2} \cdot z^3 - 1$$

$$W_{(3)} = z \left(z^6 - \frac{7\sqrt{2}}{4} z^3 - 1 \right)$$

$$R_{(3)} = z^{12} - 22\sqrt{2}(z^9 + z^3) - 1$$

$$O_{(3)}^4 - 64\sqrt{2} \cdot W_{(3)}^2 - R_{(3)}^2 \equiv 0.$$

c) in Halbstellung.

$$O_{(2)} = (z^6 - 1) + 5(z^4 - z^2)$$

$$W_{(2)} = (z^8 + 1) - \frac{28}{3}(z^6 + z^2) - \frac{14}{3}z^4$$

$$R_{(2)} = z \left[(z^{10} + 1) - \frac{11}{9}(z^8 + z^2) + \frac{22}{3}(z^6 + z^4) \right]$$

$$27 O_{(2)}^4 - W_{(2)}^2 - 16 \cdot R_{(2)}^2 \equiv 0.$$

Bemerkung: Der Würfelform $W_{(2)}$ hat schon Brioschi in den Pariser „Comptes rendus“ (Bd. 96 (1883), S. 1689—1692) eine besondere Note: „Sur quelques propriétés d'une forme binaire du huitième ordre“ gewidmet.

Diese Form $W_{(2)}$ ist außer den bekannten auch die einzige, die in Gordans „Vorlesungen über Invariantentheorie“ (Bd. II, S. 158 ff.) hergeleitet wird.

IV. Die Formensysteme des Ikosaeders

a) in Fünftelstellung.

$$J_{(5)} = z(z^{10} + 11z^5 - 1)$$

$$D_{(5)} = (z^{20} + 1) - 228(z^{15} + z^5) + 494z^{10}$$

$$R_{(5)} = (z^{20} + 1) + 522(z^{15} - z^5) - 10005(z^{20} + z^{10})$$

$$1728J_{(5)}^5 - D_{(5)}^3 - R_{(5)}^2 \equiv 0$$

(„Ikosaeder“, S. 56).

b) in Drittelstellung.

$$J_{(3)} = (z^{12} + 1) - 11\sqrt{5}(z^9 - z^3) - 33z^6$$

$$D_{(3)} = z \left[(z^{15} - 1) + \frac{57\sqrt{5}}{8}(z^{15} + z^5) - \frac{57}{2}(z^{12} + z^6) + \frac{247\sqrt{5}}{4}z^3 \right]$$

$$R_{(3)} = (z^{20} + 1) + \frac{145\sqrt{5}}{2}(z^{20} + z^5) + \frac{3915}{8}(z^{24} + z^6)$$

$$+ 10005\sqrt{5}(z^{21} - z^9) + \frac{190095}{8}(z^{15} + z^{15})$$

$$J_{(3)}^5 + 200\sqrt{5} \cdot D_{(3)}^3 - R_{(3)}^2 \equiv 0.$$

e) in Halbstellung.

$$J_{(2)} = (z^{12} + 1) - \frac{22\sqrt{5}}{5}(z^{10} + z^2) - 33(z^8 + z^4) + \frac{44\sqrt{5}}{5}z^6$$

$$D_{(2)} = (z^{10} + 1) + \frac{38\sqrt{5}}{3}(z^{18} + z^2) - 19(z^{16} + z^4) \\ + 152\sqrt{5}(z^{14} + z^6) - 494(z^{12} + z^8) - \frac{988\sqrt{5}}{3}z^{10}$$

$$R_{(2)} = z \left[(z^{20} + 1) + \frac{116}{9\sqrt{5}}(z^{26} - z^2) + \frac{1769}{25}(z^{24} - z^4) - \frac{464}{\sqrt{5}}(z^{22} - z^6) \right. \\ \left. + \frac{2001}{5}(z^{20} - z^8) + \frac{2668}{3\sqrt{5}}(z^{18} - z^{10}) + \frac{12673}{5}(z^{16} - z^{12}) \right]$$

$$J_{(2)}^5 - D_{(2)}^3 + 60\sqrt{5} \cdot R_{(2)}^2 \equiv 0.$$

Bemerkung: Zerlegt man die Koeffizienten der Formen des Oktaeders und des Ikosaeders in Primfaktoren, so findet man unter anderm, daß sie alle, soweit sie von Eins verschieden sind, im Zähler den Faktor $n - 1$ enthalten, wenn n der Grad der Form ist.

Münster i. W., Juni 1918.

Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung
mit periodischen Koeffizienten.

Bemerkung zur Arbeit gleichen Titels von Herrn HAMEL.

Von

OTTO HAUPT z. Zt. Würzburg.

In einer Arbeit*) hat Herr Hamel u. a. einige Sätze über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten bewiesen und zwar unter Heranziehung der Theorie der linearen Integralgleichungen**).

Diese Sätze folgen sehr einfach***), übrigens mit kleinen Verschärfungen, als besondere Fälle aus dem sogenannten Oszillationstheorem.†) Das soll im folgenden gezeigt werden.

a) Problemstellung.

Gegeben sei die Differentialgleichung ††)

$$(\mathfrak{A}_\lambda) \quad \ddot{y} + (\lambda + M(t))y = 0,$$

wo $M(t)$ eine reellwertige, stetige Funktion der reellen Veränderlichen t im Intervalle $0 \leq t \leq 2\pi$ und λ ein reeller Parameter, ferner $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ zu setzen ist.

$Y_1(t; \lambda)$ und $Y_2(t; \lambda)$ seien normierte unabhängige Lösungen von (\mathfrak{A}_λ) , eindeutig festgelegt durch die Anfangsbedingungen

$$Y_1(t=0; \lambda) = 1, \quad Y_2(t=0; \lambda) = 0,$$

$$\dot{Y}_1(t=0; \lambda) = 0, \quad \dot{Y}_2(t=0; \lambda) = 1,$$

so daß

$$Y_1 \dot{Y}_2 - \dot{Y}_1 Y_2 \equiv 1.$$

*) Math. Annalen Bd. 73, 1912, S. 371—412. Im folgenden zitiert mit H.

**) Vgl. H., S. 398.

***) Die Koeffizienten der Differentialgleichung werden zunächst nicht als periodisch, auch nicht als regulär (analytisch) vorausgesetzt.

†) Vgl. Haupt, Über eine Methode usw. (Math. Ann. Bd. 76, 1914, S. 67ff.) und die dort zitierte Literatur.

††) H., S. 398.

Die *Randwertaufgabe*^{*)} lautet: Gesucht werden für jedes reelle λ diejenigen Lösungen von (\mathfrak{A}_2) , welche den Bedingungen genügen

$$(1) \quad y(2\pi) = \varrho \cdot y(0), \quad \dot{y}(2\pi) = \varrho \cdot \dot{y}(0).$$

Die reelle oder komplexe Konstante ϱ bestimmt sich aus der reziproken Gleichung^{**)}

$$(2) \quad \begin{vmatrix} Y_1(2\pi) - \varrho & Y_2(2\pi) \\ \dot{Y}_1(2\pi) & \dot{Y}_2(2\pi) - \varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - \varrho(Y_1(2\pi) + \dot{Y}_2(2\pi)) + 1 = 0.$$

Die Diskriminante Δ von (2) ist

$$(3) \quad \Delta = [Y_1(2\pi) + \dot{Y}_2(2\pi) - 2] \times [Y_1(2\pi) + \dot{Y}_2(2\pi) + 2] = F_1(\lambda) \times F_2(\lambda).$$

b) Verteilung der Eigenwerte für die Differentialgleichung (\mathfrak{A}_2) .

Die Verteilung reeller und komplexer Wurzeln von (2) auf die reellen Werte von λ , d. h. auf der reellen λ -Achse, hängt von den Nullstellen der Diskriminante Δ ab. Die beiden Faktoren $F_1(\lambda)$ und $F_2(\lambda)$ von Δ , die nicht beide gleichzeitig verschwinden können, liefern aber, gleich Null gesetzt, diejenigen ausgezeichneten Werte λ_j bzw. $\tilde{\lambda}_j$ von λ , für welche die Randbedingungen des „reinperiodischen“ Falles^{***}):

$$y(2\pi; \lambda_j) = y(0; \lambda_j), \quad \dot{y}(2\pi, \lambda_j) = \dot{y}(0, \lambda_j)$$

bzw. des „halbperiodischen“ Falles^{***}):

$$y(2\pi, \tilde{\lambda}_j) = -y(0, \tilde{\lambda}_j), \quad \dot{y}(2\pi, \tilde{\lambda}_j) = -\dot{y}(0, \tilde{\lambda}_j)$$

durch eine oder zwei verschiedene, normierte Lösungen, „Eigenfunktionen“ genannt, von $(\mathfrak{A}_{\lambda_j})$ bzw. von $(\mathfrak{A}_{\tilde{\lambda}_j})$ erfüllt werden.

Eine Lösung $y(t)$ ist normiert, sobald

$$\int_0^{2\pi} \{y(t)\}^2 dt = 1.$$

Die λ_j heißen „reinperiodische Eigenwerte“, die $\tilde{\lambda}_j$ „halbperiodische“. Gehören zu einem Eigenwert zwei verschiedene Eigenfunktionen, so wird er doppelt gezählt und heißt „zweifacher Eigenwert; im anderen Falle heißt der Eigenwert „einfach“.

Nun besagt das *Oszillationstheorem*[†]): Die gegenseitige Verteilung der — übrigens stets reellen, nur gegen den unendlichfernen Punkt der positiven λ -Achse sich häufenden — rein- und halbperiodischen Eigenwerte

^{*)} H., S. 377.

^{**) H., S. 378.}

^{***} H., S. 379.

†) Vgl. Haupt, I. c., S. 79 und die dortigen Zitate.

auf der (reellen) λ -Achse ist für alle Differentialgleichungen (\mathfrak{U}_2) die folgende:

Sind die rein- bzw. halbperiodischen Eigenwerte der Größe nach geordnet

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 < \tilde{\lambda}_3 \leq \tilde{\lambda}_4 < \dots,$$

so gilt stets die Beziehung

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \tilde{\lambda}_{2j-1} \leq \tilde{\lambda}_{2j} < \lambda_{2j-1} \leq \lambda_{2j} < \tilde{\lambda}_{2j+1} \leq \dots$$

In Worten: Durchläuft man die (reelle) λ -Achse in positiver Richtung, so folgen auf zwei halb- bzw. reinperiodische Eigenwerte, die übrigens durch keine weiteren Eigenwerte getrennt sind, immer zwei rein- bzw. halbperiodische Eigenwerte.*). Vom kleinsten (rein periodischen) Eigenwert ist hierbei abgesehen.

Ferner: Die transzendenten Gleichungen $F_1(\lambda) = 0$ und $F_2(\lambda) = 0$ (vgl. (3)) besitzen höchstens zweifache Nullstellen, welche dann stets mit zweifachen Eigenwerten identisch sind.^{**)} $F_1(\lambda)$ bzw. $F_2(\lambda)$ wechseln also das Zeichen dann und nur dann, wenn ein einfacher Eigenwert vorliegt. Da nun für negative Werte λ , welche dem absoluten Betrage nach hinreichend groß sind, stets $F_1(\lambda)$ und $F_2(\lambda)$ positive Werte besitzen^{***)}, so folgt die Vorzeichenregel†):

$$\left. \begin{array}{ll} F_1(\lambda) > 0 & \text{für } \lambda < \lambda_0 \\ F_1(\lambda) < 0 & \text{für } \lambda_{2j} < \lambda < \lambda_{2j+1} \\ F_1(\lambda) > 0 & \text{für } \lambda_{2j+1} < \lambda < \lambda_{2j+2} \end{array} \right\} \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left. \begin{array}{ll} F_2(\lambda) > 0 & \text{für } \lambda < \tilde{\lambda}_1 \\ F_2(\lambda) < 0 & \text{für } \tilde{\lambda}_{2j-1} < \lambda < \tilde{\lambda}_{2j} \\ F_2(\lambda) > 0 & \text{für } \tilde{\lambda}_{2j} < \lambda < \tilde{\lambda}_{2j+1} \end{array} \right\} \quad j = 1, \dots$$

*) Es ist das eine unmittelbare Folgerung aus dem Oszillationstheorem. Denn diesem gemäß besitzen die zu λ_{2j-1} und λ_{2j} (bzw. $\tilde{\lambda}_{2j-1}$ und $\tilde{\lambda}_{2j}$) gehörigen Eigenfunktionen genau $2j$ (bzw. $2j-1$) Nullstellen im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ ($j = 1, 2, \dots$), während zu λ_0 keine Nullstellen (für $0 \leq t \leq 2\pi$) gehören. Die Anzahl der erwähnten Nullstellen heißt die „zum Eigenwert gehörige Oszillationszahl“. (Vgl. Haupt, I. c., S. 74.)

**) Vgl. Haupt, I. c., S. 77.

***) Dies folgt etwa aus asymptotischen Darstellungen. Vgl. dazu etwa Löwenstein, Reihenentwicklungen bei linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung (Würzburger Diss. 1914, I, § 8, S. 19), ferner H., S. 407.

†) Falls $\lambda_{2j} = \lambda_{2j-1}$ oder $\tilde{\lambda}_{2j-1} = \tilde{\lambda}_{2j}$, entfällt die entsprechende Ungleichung $F_1 > 0$ bzw. $F_2 < 0$.

e) Stabile und instabile Typen der Differentialgleichung (\mathfrak{U}_2).

Man sagt, (\mathfrak{U}_2) sei — für einen bestimmten Wert von λ — „vom stabilen Typus“, wenn für den genannten Wert von λ entweder die Wurzeln φ komplex sind, d. h. $\Delta < 0$, oder wenn (für $\Delta = 0$) ein zweifacher Eigenwert vorliegt. Andernfalls heiße (\mathfrak{U}_2) vom „instabilen Typus“.*)

In dieser Bezeichnung lauten die oben unter b) gewonnenen Ergebnisse:

I. (\mathfrak{U}_2) ist vom stabilen Typus dann und nur dann, wenn λ einem von Eigenwerten freien, offenen Intervall der reellen λ -Achse angehört, dessen Begrenzung von zwei „ungleichartigen“ Eigenwerten, d. h. von einem reinperiodischen und von einem halbperiodischen Eigenwert gebildet wird; ist einer der Begrenzungspunkte ein zweifacher Eigenwert, so herrscht auch in ihm Stabilität.

II. (\mathfrak{U}_2) ist dann und nur dann vom instabilen Typus: 1. wenn λ gleich oder kleiner ist als der kleinste (übrigens stets einfache) reinperiodische Eigenwert von (\mathfrak{U}_2) oder 2. wenn λ einem von Eigenwerten freien abgeschlossenen Intervall angehört, dessen Begrenzung von zwei einfachen „gleichartigen“ Eigenwerten, d. h. von zwei einfachen reinperiodischen oder zwei einfachen halbperiodischen Eigenwerten gebildet wird, die übrigens beide zur gleichen Oszillationszahl gehören.

Das einem einfachen rein-(halb-)periodischen Eigenwert λ_i anliegende Gebiet der Instabilität liegt also ober- oder unterhalb von λ_i , je nachdem der nächste***) einfache rein-(halb-)periodische Eigenwert ober- oder unterhalb von λ_i liegt.

Wird M als rein periodische und reguläre Funktion von t (mit der Periode 2π) angenommen, so hat man das Ergebnis von Herrn Hamel.****)

Nebenbei sei bemerkt: Mittels des Oszillationstheorems beherrscht man eine sehr allgemeine Klasse von Differentialgleichungen der Form†)

$$\frac{d}{dt} \left(p(t; \lambda) \frac{dy}{dt} \right) + q(t; \lambda) y = 0.$$

Für diese Klasse gelten, falls $p(t; \lambda)$ in t rein periodisch mit der Periode 2π ist, die obigen Ergebnisse unverändert; für nichtperiodisches $p(t; \lambda)$ ergeben sich nur unwesentliche Änderungen in den vorzuschreibenden Randbedingungen.

*) H., S. 379 und 380.

**) Der also mit λ_i zur gleichen Oszillationszahl gehört.

****) H., § 13 und 14, insbes. S. 404.

†) Vgl. Haupt, l. c., § 4.

d) Asymptotische Verteilung der Intervalle der Stabilität und Instabilität.

Die für sehr große Oszillationszahlen geltende asymptotische Darstellung für die Eigenwerte*) von (\mathfrak{A}_λ) zeigt, daß die Länge der Intervalle, in denen Instabilität herrscht, unter jeden Betrag abnimmt, wenn λ nur hinreichend groß und positiv gewählt wurde.

Ferner ergibt eine Beziehung von Herrn Hamel**), daß für hinreichend große positive λ die Differenz $|1 - \varrho_i|$ ($i = 1, 2$) kleiner wird als jede vorgegebene kleine positive Größe; ϱ_i ($i = 1, 2$) bedeuten hierin die reellen Faktoren, mit denen sich die beiden zum betrachteten Werte λ gehörenden instabilen Lösungen nach Ablauf einer Periode bzw. multiplizieren.

Schließlich gilt der Satz:

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}_1) \quad \ddot{y} + (M_0(t) + \lambda)y = 0$$

mit regulärem, rein periodischem Koeffizienten; und es besitze (\mathfrak{A}_1) abschätzbar unendlich viele zweifache Eigenwerte. In jeder beliebig kleinen Nachbarschaft von (\mathfrak{A}_1) existieren dann stets Differentialgleichungen

$$(\tilde{\mathfrak{A}}_2) \quad \ddot{y} + (\lambda + M_0(t) + m(t))y = 0$$

[mit gleichfalls regulärem, rein periodischem Koeffizienten] die lediglich einfache Eigenwerte besitzen.***). $(\tilde{\mathfrak{A}}_2)$ weist also oberhalb jeden noch so großen Wertes λ immer noch Gebiete der Instabilität auf.

Der Begriff der Nachbarschaft wird hierbei folgendermaßen erklärt: Bedeutet ε eine reelle positive Größe, so gehört die Differentialgleichung $(\tilde{\mathfrak{A}}_2)$ dann und nur dann der Nachbarschaft ε von (\mathfrak{A}_1) an, wenn $|m(t)| < \varepsilon$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Die Konstruktion derartiger Nachbarfälle und damit der Beweis dieses Satzes ergibt sich bei Benutzung des allgemeinen Stetigkeitssatzes†) aus folgender, auf Herrn Hamel ††) zurückgehenden Bemerkung: Es habe (\mathfrak{A}_1) für $\lambda = \lambda_0$ zwei rein-(bzw. halb-)periodische Lösungen. Dann ist die Differentialgleichung $(\tilde{\mathfrak{A}}_2)$ für $\lambda = \lambda_0$ vom instabilen Typus, wenn gesetzt wird ($\mu + 0$): $m(t) = -\mu \{ \ddot{q}(t) + (1 + \dot{q}(t))^2 \mu + 4\pi \dot{y}_0(t) y_0(t) \}$.

*) Vgl. Fußnote **). S. 8.

**) H., § 18, S. 412. Die dort auftretende reelle Größe μ steht zu ϱ (vgl. (1)) in der Beziehung $\varrho = e^{2\pi\mu}$.

***) Der Satz gilt allgemein dann, wenn die auftretenden Koeffizienten lediglich stetige Funktionen von t sind.

†) Haupt, I. c., S. 80, Hilfsatz II.

††) H., § 17..4, S. 410.

Dabei bedeute μ einen reellen Parameter, y_0 eine der beiden zu $\lambda = \lambda_0$ gehörigen (normierten) Eigenfunktionen von (\mathfrak{A}_1) ; schließlich sei

$$q(t) = 2x \int_0^t [y_0(t)]^2 dt - t.$$

Beachtet man noch, daß jeder Eigenwert höchstens mit einem einzigen anderen, nämlich mit dem zur gleichen Oszillationszahl gehörigen, gleichartigen Eigenwerte zusammenfallen kann, so läßt sich zuerst der kleinste vorhandene zweifache Eigenwert in zwei einfache auflösen; dabei läßt sich überdies erreichen, daß alle übrigen Eigenwerte, die kleiner als der betrachtete zweifache und also nur in endlicher Zahl vorhanden sind, sämtlich einfach bleiben.*). Dies Verfahren, unbegrenzt fortgesetzt, kann so eingerichtet werden, daß die Koeffizienten der nacheinander entstehenden Differentialgleichungen gleichmäßig gegen eine reguläre, reinperiodische Funktion und die Paare zu gleicher Oszillationszahl gehöriger Eigenwerte dieser Differentialgleichungen gegen Paare voneinander verschiedener Werte λ konvergieren.

Anmerkung von Herrn Hamel: Aus diesem Satze des Herrn Haupt geht hervor, daß mein Satz in § 15 meiner genannten Arbeit falsch ist. Tatsächlich findet sich im Beweisversuch S. 405 eine Lücke, auf die mich Herr Haupt aufmerksam machte.

Hamel.

e) Verteilung der Stabilitäts- und Instabilitätsintervalle für die Differentialgleichung vom polaren Typus:

$$(\mathfrak{B}_2) \quad \ddot{y} + \lambda \cdot M(t) y = 0, \quad M \geqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi.$$

Herr Hamel betrachtet auch die Differentialgleichung vom Typus (\mathfrak{B}_1) und zwar in der Umgebung der Stelle $\lambda = 0$. Er erhält das Kriterium:**)

„ (\mathfrak{B}_λ) ist stabil bzw. instabil für kleine Werte von λ , wenn

$$\lambda \int_0^{2\pi} M(t) dt > 0 \quad (\text{bzw. } < 0).$$

Für $\int_0^{2\pi} M(t) dt = 0$ entscheiden die höheren Glieder.“

*.) Man kann beispielsweise fordern, daß je zwei zusammengehörige unter diesen Eigenwerten höchstens einen bestimmten Bruchteil ihres ursprünglichen gegenseitigen Abstandes einbüßen.

**) H., § 6, S. 386.

Für $M(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) ist das Kriterium bereits in den Sätzen unter c) enthalten. Wechselt aber $M(t)$ im Intervalle $0 \leq t \leq 2\pi$ das Zeichen, so liegt ein definites polares*) Problem vor. Das zugehörige Oszillationstheorem**) ergibt außer dem Verhalten in der Umgebung von $\lambda = 0$ auch allgemein das Verhalten „im Großen“. Nämlich:

Wenn $\int_0^{2\pi} M(t) dt > 0 (< 0)$, so lassen sich stets negative (positive) Werte λ_0 angeben, von der Eigenschaft, daß die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}_i^0) \quad \ddot{y} + (\lambda_0 M(t) + \lambda) y = 0$$

nur positive Eigenwerte aufweist [während

$$(\mathfrak{B}_i) \quad \ddot{y} + (\lambda + \lambda_0) M(t) y = 0$$

*unendlich viele positive sowohl als negative, rein- und halbperiodische Eigenwerte besitzt***]. Die Reihe der positiven sowohl als der negativen Eigenwerte entspricht dann, jede für sich, hinsichtlich der zugehörigen Oszillationszahlen und der Anordnung auf der positiven (bzw. negativen) λ -Achse, genau der Reihe der (positiven) Eigenwerte von (\mathfrak{A}_i^0) .*

Auch jetzt können $F_1(\lambda)$ und $F_2(\lambda)$ (vgl. (3)) nur reelle, höchstens doppelte Nullstellen besitzen***), die zweifachen Nullstellen sind mit den zweifachen Eigenwerten identisch. Und da für $\lambda = 0$ nur einer der Faktoren von Δ eine Nullstelle und zwar eine einfache hat, so folgt weiter die Gültigkeit der Vorzeichenregel. *Die Intervalle der Stabilität und Instabilität sind demnach bei der Differentialgleichung (\mathfrak{B}_i) auf der positiven sowie auf der negativen λ -Achse genau so verteilt, wie auf der positiven*

λ -Achse für die Differentialgleichung (\mathfrak{A}_i^0) soweit $\int_0^{2\pi} M(t) dt \neq 0$.

Ist schließlich $\int_0^{2\pi} M(t) dt = 0$, so modifiziert sich die Verteilung der Eigenwerte und der Stabilitäts-(bzw. Instabilitäts-)intervalle nur insofern, als die beiden absolut kleinsten reinperiodischen Eigenwerte (die also zur Oszillationszahl Null gehören) nach $\lambda = 0$ zusammenfallen.

Für $\int_0^{2\pi} M(t) dt = 0$ herrscht also beiderseits der Stelle $\lambda = 0$ Stabilität

*) Haupt, l. c., S. 90.

**) Alle Eigenwerte sind reell; sie liegen im Endlichen diskret.

***) Es folgt das beispielsweise aus der für die Eigenfunktionen gültigen Beziehung

$\int_0^{2\pi} M(t) \{y(t)\}^2 dt = 0$, wo $y(t)$ eine Eigenfunktion bedeutet. (Vgl. Haupt, l. c., S. 88.)

zen
das
ige
von
 λ_0
und zwar sicher bis zum nächsten positiven und negativen einfachen Eigenwerte. Für $\lambda = 0$ selbst liegt Instabilität vor.^{*)}

Auch (\mathfrak{B}_1) ist nur ein Sonderfall einer allgemeinen Klasse von Differentialgleichungen polaren Typs.^{**)}

Der Satz der Ziffer d) gilt auch für die polaren definiten Probleme der Ziffer e).

Würzburg, 15. August 1918.

^{*)} Herrn Hamels Kriterium, sowie diese Verschärfung, könnte man durch einfache Überlegungen auch direkt beweisen, also ohne Heranziehung des Oszillations- theorems oder einer Reihenentwicklung.

^{**) Vgl. Haupt, l. c., § 6.}

Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, daß die Gammafunktion
keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.¹⁾

Von

ALEXANDER OSTROWSKI in Göttingen.

Es ist zu beweisen, daß die Gammafunktion $\Gamma(x)$ keiner Differentialgleichung genügt, deren linke Seite ein Polynom in der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen nach x mit algebraischen Funktionen von x als Koeffizienten ist.*). Wir können uns auf die Betrachtung solcher Differentialausdrücke beschränken, deren Koeffizienten speziell *Polynome in x* sind, und nur an solche denken wir, wenn wir im folgenden von Differentialausdrücken oder Differentialgleichungen sprechen.

Verstehen wir unter der *Dimension* eines Ausdrückes von der Form

$$\mathcal{A}(x)y^{n_0}(y')^{n_1}(y'')^{n_2}\dots$$

die Summen $n_0 + n_1 + n_2 + \dots$, unter seinem *Gewicht* die Summe $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots$, so hat jeder Differentialausdruck die Form:

$$\sum_g f_{d,g} + f_{d-1} + f_{d-2} + \dots,$$

wo $\sum_g f_{d,g}, f_{d-1}, f_{d-2}, \dots$ homogene Ausdrücke von den Dimensionen $d, d-1, d-2, \dots, f_{d,g}$ homogene und isobare nach abnehmenden Gewichten geordnete Ausdrücke sind.

Von zwei Gliedern eines Differentialausdrückes

$$A(x)y^{n_0}(y')^{n_1}(y'')^{n_2}\dots \text{ und } \bar{A}(x)y^{\bar{n}_0}(y')^{\bar{n}_1}(y'')^{\bar{n}_2}\dots$$

heißt der erste *höher* als der zweite, wenn die letzte nicht verschwindende unter den Differenzen $n_0 - \bar{n}_0, n_1 - \bar{n}_1, n_2 - \bar{n}_2, \dots$ positiv ist. Unter dem *Hauptglied* eines Differentialausdrückes bzw. der entsprechenden Differentialgleichung verstehen wir das Glied von möglichst großer Dimension, dessen Gewicht nicht kleiner ist als das Gewicht aller übrigen Glieder

*.) Dieser Satz ist zum erstenmal aufgestellt und bewiesen worden von Hölder (Math. Ann. Bd. 28, S. 1). Ein anderer Beweis ist von Moore gegeben (Math. Ann. Bd. 48, S. 49).

von derselben Dimension und welches höher ist als alle Glieder von derselben Dimension und demselben Gewicht.

Unter allen Differentialgleichungen, denen $\Gamma(x)$ genügt, greifen wir diejenigen heraus, deren Hauptglied von möglichst kleiner Dimension d ist, unter allen so herausgegriffenen diejenigen, deren Hauptglied von möglichst kleinem Gewicht g ist, unter den letzteren diejenigen, deren Hauptglied am höchsten ist. Ist das Hauptglied einer so gewählten Differentialgleichung $f(y, y', y'', \dots; x) = 0$,

oder, wie wir derartige Ausdrücke kürzer schreiben werden,

$$f(y; x) = 0, \quad \text{etwa gleich}$$

$$(1) \quad G(y; x) = A(x)y^{n_0}(y')^{n_1}(y'')^{n_2} \cdots (y^{(r)})^{n_r}, \quad (n_r > 0)$$

so können wir außerdem annehmen, daß $A(x)$ den kleinstmöglichen Grad und den höchsten Koeffizienten 1 hat. Hat dann eine andere Differentialgleichung, der $\Gamma(x)$ genügt, das Hauptglied

$$\bar{A}(x)y^{m_0}(y')^{m_1}(y'')^{m_2} \cdots (y^{(r)})^{m_r},$$

so ist $A(x)$ ein Teiler von $\bar{A}(x)$, und die zweite Differentialgleichung geht aus der ersten durch Multiplikation mit $\frac{\bar{A}(x)}{A(x)}$ hervor.

Wegen der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ genügt $\Gamma(x)$ auch der Differentialgleichung $f(xy; x+1) = 0$. Es sei nun

$$f(y; x) = f_d(y; x) + f_{d-1}(y; x) + \cdots;$$

$$f_d(y; x) = f_{d,g}(y; x) + f_{d,g-1}(y; x) + f_{d,g-2}(y; x) + \cdots,$$

wo $f_i(y; x)$ von Dimension i , $f_{d,k}(y; x)$ von Dimension d und Gewicht k ist. Dann ist offenbar auch $f_t(xy; x+1)$ von Dimension i . $f_{d,k}(xy; x+1)$ läßt sich in der Form darstellen

$$(2) \quad f_{d,k}(xy; x+1) = x^d f_{d,k}(y; x+1) + x^{d-1} f_{d,k-1}(y; x) + x^{d-2} f_{d,k-2}(y; x) + \cdots,$$

wo $f_{d,k,t}(y; x)$ ($t < k$) die Dimension d und das Gewicht t hat.

Insbesondere kann $f_{d,g,g-1}(y; x)$ nicht identisch verschwinden. Denn das höchste Glied von $f_{d,g,g-1}(y; x)$ ist offenbar

$$v n_r A(x+1) y^{n_0}(y')^{n_1}(y'')^{n_2} \cdots (y^{(r)})^{n_r-1}.$$

In $f(xy; x+1)$ ist das Aggregat der Glieder höchster Dimension d gleich $f_d(xy; x+1)$, in diesem ist das Aggregat der Glieder höchsten Gewichtes g gleich $x^d f_{d,g}(y; x+1)$. Daher ist das Hauptglied von $f(xy; x+1)$ gleich

$$x^d A(x+1) y^{n_0}(y')^{n_1}(y'')^{n_2} \cdots$$

und der Quotient $\frac{x^d A(x+1)}{A(x)}$ ein ganzes Polynom $D(x)$ vom Grade d . Dann ist auch

$$(3) \quad f(xy; x+1) = D(x)f(y; x) \quad \text{und} \quad f_{d-i}(xy; x+1) = D(x)f_{d-i}(y; x) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Ist aber $f_{d-i}(y; x)$ vom Grade d_i in bezug auf x , so ist der Grad von $f_{d-i}(xy; x+1)$ in bezug auf x höchstens gleich $d_i + d - i$, da $f_{d-i}(y; x)$ von Dimension $d - i$ ist, die nach der Ausführung der Differentiationen neu hinzutretende Potenz von x in jedem Glied also höchstens $(d-i)^*$ sein kann. Daher muß f_{d-i} für $i > 0$ identisch verschwinden, so daß $f(y; x)$ homogen von Dimension d ist.

Es seien die Koeffizienten von $f_{d,g}(y; x)$ durch $P_t(x)$ bezeichnet, und es sei $\Delta(x) = (x - a_1)^{e_1}(x - a_2)^{e_2}(x - a_3)^{e_3} \dots$ ($a_1 > a_2 > a_3 \dots$) ihr größter gemeinsamer Teiler, so daß $P_t(x) = \Delta(x)\Pi_t(x)$ gilt, wo $\Pi_t(x)$ ganz sind. Dann sind die Koeffizienten von $f_{d,g}(xy; x+1)$ gleich $x^t P_t(x+1)$, ihr größter gemeinsamer Teiler $x^t \Delta(x+1)$. Andererseits gilt nach (3) $x^t P_t(x+1) = D(x)P_t(x)$, daher ist auch

$$x^t \Delta(x+1) = D(x)\Delta(x).$$

Folglich muß $x^t(x - (a_1 - 1))^{e_1}(x - (a_2 - 1))^{e_2}(x - (a_3 - 1)) \dots$ durch $\Delta(x)$ teilbar sein. Wir erhalten daher sukzessive

$$a_1 = 0, e_1 \leq d; a_2 = a_1 - 1 = -1, e_2 \leq e_1; a_3 = a_2 - 1 = -2, e_3 \leq e_2; \dots$$

$$\text{und } D(x) = x^{d-e_1}(x+1)^{e_1-e_2}(x+2)^{e_2-e_3} \dots = x^{d-e_1}\bar{D}(x+1),$$

wo $\bar{D}(x) = x^{e_1-e_2}(x+1)^{e_2-e_3} \dots$ ein Teiler von $\Delta(x)$ ist.

Wir beweisen nun, daß $\bar{D}(x) = 1$ sein muß, so daß $D(x) = x^d$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß sämtliche Koeffizienten aller $f_{d,k}(y; x)$ durch $D(x)$ teilbar sind, da wir den Grad von $A(x)$ in (1) bereits möglichst klein angenommen haben. Ist nun t der größte Wert von k , für den $f_{d,t}(y; x)$ durch $\bar{D}(x)$ nicht teilbar ist, so sind alle $f_{d,s}(xy; x+1)$ ($s > t$) durch $D(x+1)$ teilbar. Das Aggregat der Glieder vom Gewicht t in $f(xy; x+1)$ ist aber wegen (2) gleich

$$x^t f_{d,t}(y; x+1) + x^{d-1} f_{d,t+1}(y; x) + x^{d-2} f_{d,t+2}(y; x) + \dots$$

Und da dieses Aggregat nach (3) durch $D(x)$, also auch $\bar{D}(x+1)$ teilbar ist, gilt dasselbe von $x^t f_{d,t}(y; x+1)$, oder $f_{d,t}(y; x+1)$, da $\bar{D}(x+1)$ zu x teilerfremd ist. Also ist auch $f_{d,t}(y; x)$ durch $\bar{D}(x)$ teilbar und mithin auch $f(y; x)$, so daß $\bar{D}(x) = 1$ und $D(x) = x^d$ sein muß.

Aus $x^t P_t(x+1) = D(x)P_t(x)$ folgt aber dann $P_t(x+1) = P_t(x)$, so daß $P_t(x) = \text{const.}$ sind. Das Aggregat der Glieder von $f_d(xy; x+1)$ vom Gewicht $g-1$ ist nun wegen (2)

$$x^d f_{d,g-1}(y; x+1) + x^{d-1} f_{d,g-1}(y; x).$$

Da dieses Aggregat nach (3) durch $D(x) = x^d$ teilbar ist, muß $f_{d,g,g-1}(y; x)$ durch x teilbar sein. Dies ist aber unmöglich, da $f_{d,g,g-1}(y; x)$ zugleich mit $f_{d,g}(y; x)$ konstante Koeffizienten hat und nicht identisch verschwindet. Damit ist der Beweis des Hölderschen Satzes erbracht.

Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus der
Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten
mit Hilfe von Normalkoordinaten.

Von

H. VERMEIL in Göttingen.

Einleitung.

In einem n -dimensionalen Raum, dessen Maßverhältnisse durch das Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ gegeben seien, kann man, wie Riemann*) angedeutet hat, die von einem Punkte O auslaufenden geodätischen Linien als gerade Linien ansehen. Legt man dann ein orthogonales isometrisches n -Bein mit dem Anfangspunkt O zugrunde, so sind die Riemannschen Normalkoordinaten y_1, y_2, \dots, y_n eines Punktes P bezüglich dieses n -Beines einfach die Produkte des geodätischen Radiusvektors $OP = R$ in die Richtungskosinus des Anfangselementes von OP gegen die Anfangselemente des n -Beines, so daß also $\sum y_i^2 = R^2$ ist. Durch Einführung dieser Riemannschen Normalkoordinaten läßt sich bekanntlich**) in der Umgebung von O das Bogenelement, das vom Punkte (y_i) zum Punkte $(y_i + dy_i)$ führt, in die Gestalt setzen:

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i=1}^n dy_i^2 + \sum_{ik, rs} \mathfrak{P}_{ik, rs}(y_1, y_2, \dots, y_n) p_{ik} p_{rs},$$

wo $p_{ik} = y_i dy_k - y_k dy_i$ ist und die zweite Summe eine quadratische Form der $\binom{n}{2}$ Verbindungen p_{ik} ist, deren Koeffizienten $\mathfrak{P}_{ik, rs}$ Potenzreihen der y_i sind.

Schreibt man beliebig ein Linienelement von der Gestalt (1) hin, wo die $\mathfrak{P}_{ik, rs}$ der einzigen Bedingung genügen, in einer gewissen Umgebung

*) Habilitationsvortrag Werke, 2. Aufl., S. 276 f.

**) Webers Anmerkungen in Riemanns Werken, 2. Aufl., S. 405—411 und F. Schur, Math. Ann. 27, S. 587—587.

von O zu konvergieren, so sind die y_i stets die Riemannschen Normalkoordinaten eines n -dimensionalen Raumes.

Setzt man das Bogenelement (1) in die Gestalt:

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{ik} b_{ik}(y) dy_i dy_k,$$

so kann man durch Einsetzen in die Formel sofort die Riemannsche Krümmungsform K (d. h. den Zähler des Riemannschen Krümmungsmaßes) für die durch die Differentiale (dy_i) und (δy_i) festgelegte Flächenrichtung im Punkte (y_i) berechnen, nämlich:

$$(3) \quad K = \sum_{ik, rs} (ik, rs) p'_{ik} p'_{rs},$$

wobei $p'_{ik} = \delta y_i dy_k - \delta y_k dy_i$ ist und die Summe eine quadratische Form der $\binom{n}{2}$ Verbindungen p'_{ik} ist, deren Koeffizienten (ik, rs) , die Riemannschen Vierindizesymbole*), sich durch einfache Differenzierungsprozesse aus den b_{ik} und also auch aus den $\mathfrak{P}_{ik, rs}$ als Potenzreihen in den y_i ableiten lassen. Eine Abzählung der Glieder gleicher Dimension von (1) und (3) legt nun die Vermutung nahe, daß sich aus dem Ausdruck (3) auch umgekehrt wieder das Linienelement (1) herleiten läßt.

Der erste Teil dieser Arbeit hat nun in der Tat zum Ziel folgendes Theorem, auf das mich Herr Geheimrat Klein aufmerksam machte, zu beweisen:

Ist der Zähler K des Riemannschen Krümmungsmaßes bekannt, indem die (ik, rs) als Potenzreihen der y_i gegeben sind, so berechnen sich daraus die $\mathfrak{P}_{ik, rs}$, nach gewissen Normierungen, eindeutig, indem sich die Glieder m^{th} Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik, rs}$ jeweils durch die Glieder $0^{th}, 1^{st}, 2^{nd}, \dots, m^{th}$ Ordnung der (ik, rs) bestimmen lassen.

*.) Geht man von dem Linienelement in der Gestalt $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ aus und bezeichnet mit A seine Determinante und mit A_{ik} das algebraische Komplement von a_{ik} und benutzt noch die Christoffelschen Dreindizesymbole erster Art

$$\left[\begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \right),$$

so ist das Riemannsche Vierindizesymbol

$$(4) \quad (ik, rs) = \frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial x_k \partial x_s} + \frac{\partial^2 a_{is}}{\partial x_i \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{is}}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{kr}}{\partial x_i \partial x_s} + 2 \sum_{uv} \frac{A_{uv}}{A} \left(\left[\begin{smallmatrix} ir \\ \mu \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} ks \\ v \end{smallmatrix} \right] - \left[\begin{smallmatrix} is \\ \mu \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} kr \\ v \end{smallmatrix} \right] \right).$$

Hiermit wird zugleich folgender Satz aus dem Riemannschen Habilitationsvortrag:^{*)}

„Wenn also das Krümmungsmaß in jedem Punkte . . . gegeben wird, so werden daraus die Maßverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen.“

strengh bewiesen sein. Ich bemerke gleich hier, daß mich Fräulein E. Noether bei der Abfassung des Beweises unterstützt hat; besonders die Grundgedanken von I § 3 verdanke ich einer schriftlichen Mitteilung von ihr. Während ich noch mit der Abfassung dieser Arbeit beschäftigt war, ist eine Note von ihr mit ähnlichen Beweismethoden und weitergehenden Resultaten in den Göttinger Nachrichten 1918 betitelt „Invarianten beliebiger Differentialausdrücke“ in Druck gegeben, deren Korrekturbogen ich einsehen durfte.

Der zweite Teil meiner Abhandlung behandelt die Frage nach der Äquivalenz zweier quadratischer Differentialformen (zweier Bogenelemente). Die Riemannsche Krümmungsform K eines Linienelementes hängt aufs engste mit der von Christoffel^{**) (hergeleiteten Differentialform G_4 zusammen. Aus letzterer leitet Christoffel durch *kovariante Differentiation* eine Reihe weiterer Differentialformen G_5, G_6, G_7, \dots her, durch deren Untersuchung er das Äquivalenzproblem unter gewissen Einschränkungen lösen kann. Nun werde ich zeigen, daß, wenn man die G_4, G_5, G_6, \dots in Riemannschen Normalkoordinaten ausdrückt und ihre Werte für den Punkt $y_i = 0$ bildet, daß dann die Kenntnis von $(G_4)_0, (G_5)_0, \dots, (G_{m+4})_0$ ausreicht, um die Glieder 0^{ter} bis m^{ter} Ordnung der Krümmungsform und somit nach Teil I auch die Glieder 0^{ter} bis m^{ter} Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ eindeutig zu berechnen. Dieser Umstand wird im wesentlichen hinreichen, um ohne weitere Rechnung das Christoffelsche Äquivalenztheorem zu beweisen.}

Dieses Ergebnis ist als Mutmaßung bereits von Herrn Geheimrat Klein in einer nur in wenigen Exemplaren vorhandenen Ausarbeitung seiner Vorlesung von S.-S. 1917 über „Invariantentheorie allgemeiner kontinuierlicher Transformationsgruppen“ ausgesprochen.

Teil I

§ 1. Normierung des Linienelementes.

Die Gestalt des Linienelementes (1) ist noch nicht eindeutig bestimmt. Man kann nämlich zu der zweiten Summe noch identisch verschwindende Ausdrücke hinzufügen, die die Potenzreihen \mathfrak{P} (aber nicht

^{*)} Werke, 2. Aufl., S. 280 oben.

^{**) Crelles Journal 70 (1869), S. 46—70.}

das Linienelement selbst) ändern. Daher werden, um Eindeutigkeit der Darstellung zu erhalten, Normierungen notwendig.

Entwickelt man nämlich die identisch verschwindende vierreihige Determinante $(y \ dy \ y \ dy)_{ikrs}$, wo i, k, r, s alle verschieden sind, nach zweireihigen Unterdeterminanten, so erhält man bekanntlich $\binom{n}{4}$ Identitäten

$$(5) \quad 2(p_{ii} p_{rs} + p_{ir} p_{sk} + p_{is} p_{kr}) = 0.$$

Wenn man diese mit beliebigen Potenzreihen der y multipliziert und zu (1) addiert, so wird dadurch (1) in der angegebenen Weise abgeändert, und ich will dann (1) so normieren, daß

$$(5a) \quad \mathfrak{P}_{ik, rs} + \mathfrak{P}_{ir, sk} + \mathfrak{P}_{is, kr} = 0 \quad \text{wird.}$$

Ferner liefert die Entwicklung der identisch verschwindenden dreireihigen Determinante $(yydy)_{rst}$, wo r, s, t alle verschieden sind, die $\binom{n}{3}$ Identitäten $y_r p_{st} + y_s p_{tr} + y_t p_{rs} = 0$.

Multipliziert man diese mit einem beliebigen der $\binom{n}{2}$ p_{ik} , so erhält man $\binom{n}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{4}$ unabhängige*) (d. h. solche, die nicht durch lineare Kombination von Identitäten (5) mit Faktoren y entstehen) Identitäten

$$(6) \quad y_r p_{ik} p_{st} + y_s p_{ik} p_{tr} + y_t p_{ik} p_{rs} = 0.$$

Wenn man diese mit beliebigen Potenzreihen der y multipliziert und zu (1) addiert, hat man wieder Umänderungsmöglichkeiten für die zweite Summe in (1). Ich will dann so normieren, daß

$$(6a) \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik, st}}{\partial y_r} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik, tr}}{\partial y_s} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik, rs}}{\partial y_t} = 0$$

wird. Von diesen Bedingungen sind auch nur $\binom{n}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{4}$ unabhängig (d. h. nicht durch Differentiation und Kombination von Bedingungen (5) ableitbar).

*) Um diese Anzahl zu erhalten, unterscheiden wir drei Fälle: entweder kommen beide Indizes von p_{ik} in dem Tripel der drei verschiedenen Indizes r, s, t vor, oder nur ein Index, oder kein Index. Für ein bestimmtes Tripel kommt der erste Fall 3 mal, der zweite $3(n-3)$ mal, der dritte $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ mal vor. Im ersten Falle erhält man also $3 \times \binom{n}{3}$ Identitäten, im zweiten Falle nur $2(n-3) \times \binom{n}{3}$ unabhängige, im dritten Falle nur $\frac{(n-3)(n-4)}{6} \times \binom{n}{3}$ unabhängige Identitäten (6). Diese Zahlen für den zweiten und dritten Fall findet man, indem man für irgend 4 bzw. 5 feste, verschiedene Indizes alle möglichen Identitäten (6) hinschreibt und untersucht, wie viele von ihnen nicht durch Kombination von Identitäten (5) folgen.

Wir wollen nun zeigen, daß alle anderen möglichen Identitäten aus den Identitäten (5) und (6) durch Kombination mit Faktoren, die Funktionen von y sind, entstehen. Dazu beweisen wir zunächst, daß alle Identitäten in y und dy von der Form $g(y_i, p_{ki}) = 0$, wo g in den p_{ki} homogen vom Grade μ ist, dem Modul der dreireihigen (identisch verschwindenden) Determinanten

$$(y \ y \ dy)_{ikl} = y_i p_{kl} + y_k p_{li} + y_l p_{ik}$$

angehören. Offenbar genügt es, sich bei diesem Nachweis auf die einzelnen in den y_i homogenen Bestandteile von g zu beschränken, und es werde daher g homogen vom Grade ν in den y_i vorausgesetzt. (Auch die Identität (5) gehört diesem Modul an; denn entwickelt man die vierreihige Determinante $(y \ dy \ y \ dy)_{ikrs} = -(dy \ y \ dy)_{ikrs}$ nach der ersten Zeile, so erhält man als Faktoren der dy die dreireihigen Determinanten des Moduls.)

Ich setze nun für das Folgende $dy_i = z_i$ und für die y_i , welche in p_{ik} auftreten, x_i , so daß p_{ik} übergeht in $q_{ik} = x_i z_k - x_k z_i = (xz)_{ik}$. (Kommt jedoch y in g nicht explizit, sondern nur in den Verbindungen p_{ik} vor, so lasse ich in je einem p_{ik} jedes Terms von g die y unverändert stehen. Für diesen Fall sind im folgenden Beweis nur die Grade der Homogenität in den Variablenreihen x, y, z abzuändern.) Dadurch geht g über in eine Funktion: $g(y_i, q_{ki}) = f(x, y, z)$,

die in den x wie in den z homogen vom μ^{ten} Grade, in den y homogen vom ν^{ten} Grade ist. Diese Funktion $f(x, y, z)$ hat die Eigenschaft, zu verschwinden, erstens, wenn man $x_i = y_i$ setzt. Denn dann geht f über in $g(y_i, \bar{p}_{ki})$, wo $\bar{p}_{ki} = (yz)_{ki}$, nur eine andere Schreibweise für $p_{ki} = (ydy)_{ki}$ ist; und dies ist nach Voraussetzung gleich Null. Also ist

$$f(y, y, z) = 0.$$

Und zweitens verschwindet $f(x, y, z)$ allgemein, wenn man $x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$ setzt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} [(xz)_{k_1 l_1} \cdots (xz)_{k_\mu l_\mu}]_{x=\lambda_1 y + \lambda_2 z} &= (\lambda_1 (yz)_{k_1 l_1} + \lambda_2 (xz)_{k_1 l_1}) \cdots \\ &\quad \cdots (\lambda_1 (yz)_{k_\mu l_\mu} + \lambda_2 (xz)_{k_\mu l_\mu}) = \lambda_1^\mu (yz)_{k_1 l_1} \cdots (yz)_{k_\mu l_\mu}, \end{aligned}$$

und daher $f(\lambda_1 y + \lambda_2 z, y, z) = \lambda_1^\mu f(y, y, z) = 0$.

Enthalten nun zunächst die Variablenreihen x, y, z nur je drei Variable, so kann man hieraus bekanntlich*) schließen

$$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{\Delta} \quad (\Delta = (xyz)).$$

*) Vgl. etwa E. Noether, Math. Ann., Bd. 77, S. 100, Hilfsatz a.

Kommen jedoch in jeder der drei Reihen x, y, z $n(n > 3)$ Variable vor, so bedienen wir uns zum Nachweis der Reihenentwicklung in der von E. Noether (l. c. S. 101) angegebenen Form. Wir setzen

$$x_i = \xi_1 u_i + \xi_2 v_i + \xi_3 w_i, \quad y_i = \eta_1 u_i + \eta_2 v_i + \eta_3 w_i, \quad z_i = \zeta_1 u_i + \zeta_2 v_i + \zeta_3 w_i.$$

Dadurch geht $g(y_i, q_k) - f(x, y, z)$ über in eine Funktion $Z(\xi, \eta, \zeta)$ der drei ternären Variablenreihen ξ, η, ζ , die in ξ und ζ homogen vom μ^{ten} , in η homogen vom ν^{ten} Grade ist. (Sie enthält außerdem die Variablenreihen u, v, w als Parameter.) Für Z haben wir dann die Reihenentwicklung (l. c. Formel (3))

$$Z = \sum P H + \Delta \cdot \sum P H_1 + \Delta^2 \cdot \sum P H_2 + \cdots + \Delta^n \sum P H_n,$$

wo $\Delta = (\xi \eta \zeta)$ ist. Hier bedeuten die Zeichen P Polarenprozesse. Ferner sind die H durch ganz bestimmte Polarenprozesse aus Z abgeleitet, während die H_1, H_2, \dots, H_n durch ganz bestimmte Polarenprozesse aus $\Omega(Z), \Omega^2(Z), \dots, \Omega^n(Z)$ gewonnen werden. — Nun war $f(x, y, z)$ eine solche Funktion der Variablenreihen x, y, z , welche verschwand, wenn man $x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$ setzte. Es muß also in diesem Falle auch Z verschwinden; d. h. offenbar in Anbetracht der obigen Transformationsformeln: $Z(\xi, \eta, \zeta)$ verschwindet, wenn man $\xi_i = \lambda_1 \eta_i + \lambda_2 \zeta_i$ setzt. Wendet man dies auf die Reihenentwicklung an, so folgt wie oben bei drei Variablen

$$\sum P H \equiv 0 \pmod{\Delta}$$

und weiter, da dieser Ausdruck bei Anwendung des Ω -Prozesses verschwindet (vgl. l. c. Hilfssatz c)

$$\sum P H = 0,$$

so daß die Reihenentwicklung lautet:

$$Z = \Delta \cdot \sum P H_1 + \Delta^2 \cdot \sum P H_2 + \cdots + \Delta^n \sum P H_n.$$

Nun erhält man offenbar für den Ω -Prozeß

$$\Omega_{\xi \eta \zeta} = \sum_{i, k, l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right)_{i k l} (uvw)_{i k l}$$

und für einen Polarenprozeß

$$\sum_1^3 \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \sum_1^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots$$

Setzt man speziell $\xi_1 = \eta_2 = \zeta_2 = 1$, $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \zeta_3 = 0$, so wird $u_i = x_i$, $v_i = y_i$, $w_i = z_i$ und $Z(\xi, \eta, \zeta)$ geht über in $f(u, v, w) - f(x, y, z)$. Da nun die Anwendung des Ω -Prozesses auf $Z - f$ die Determinantenfaktoren $(uvw)_{i k l} - (xyz)_{i k l}$ hervorbringt, und diese durch die Polarenprozesse $\sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ nicht beeinflußt werden, so hat man, weil die H_1, \dots, H_n durch

spezielle Polarenprozesse aus $\Omega(Z), \dots, \Omega^n(Z)$ entstehen, aus der Reihenentwicklung gefunden

$$f(x, y, z) \equiv 0 \text{ (modd. } (xyz)_{ikl}).$$

Hiermit ist, wenn man für x wieder y und für z wieder dy schreibt, bewiesen, daß jede Identität $g(y_i, p_{kl}) = 0$ dem Modul der dreireihigen Determinanten $(y y dy)_{ikl}$ angehört.

Wenn wir jetzt eine solche dreireihige Determinante mit $[y_i p_{kl}]_q$ bezeichnen, wo der äußere Index q angezeigt, daß die inneren Indizes i, k, l für andere q immer andere Tripel von verschiedenen Indizes bedeuten, so haben wir für jede Form g des Moduls die Darstellung

$$g(y_i p_{kl}) = Q_1(y, dy) [y_i p_{kl}]_1 + Q_2(y, dy) [y_i p_{kl}]_2 + \dots + Q_N(y, dy) [y_i p_{kl}]_N$$

$$\left(N = \binom{n}{3} \right).$$

Nun können wir aber nur solche g gebrauchen, die in den p_{ik} homogen vom zweiten Grade sind; daher sind die Q offenbar homogen vom ersten Grade in den dy . Wir müssen nun diese dy mit den y so vereinigen, daß Determinanten p_{ik} entstehen; und dies ist nur auf zwei Weisen möglich. Entweder tritt ein dy aus einem Q heraus und vereinigt sich mit den y in $[y_i p_{kl}]$. Dann wird man, etwa mit $dy_i [y_i p_{kl}]$ beginnend und passende Bestandteile aus vier Q zusammenfassend, notwendig zu dem Ausdruck

$$2(p_{ij}p_{kl} + p_{kj}p_{li} + p_{il}p_{kj}),$$

also zu einem Ausdruck (5) geführt. Oder ein dy vereinigt sich mit einem y in Q und zu diesem Produkt tritt notwendig ein analoges Produkt aus demselben Q hinzu, und dies führt offenbar zu einem Ausdruck (6). Also entstehen in der Tat alle Identitäten $g(y_i, p_{kl}) = 0$, welche in den p_{ik} homogen vom zweiten Grade sind aus den Identitäten (5) und (6) durch Zusammenfassung mit Multiplikatoren, die Funktionen von y allein sind. Daher bilden die linken Seiten von (5) und (6) einen Modul für die Identitäten

$$g(y_i, p_{kl}) = 0.$$

Nun können wir anknüpfend an eine Arbeit von Herrn Fischer*) sofort zeigen, daß durch die Normierungen (5a) und (6a) das Linienelement (1) eindeutig bestimmt ist. Bezeichnen wir nämlich mit $\varphi_q(y, p)$ die Gesamtheit der Terme von (1), die in den y homogen von q^{ter} Dimension sind, so gehört φ_q zur Restschar $\mathfrak{M}(q)$, welche von den nach dem Modul $\mathfrak{M}(q)$ der Identitäten $g_q(y, p)$ kongruenten Formen je eine ausgezeichnete enthält. Die Identitäten $g_q(y, p)$, die in den y homogen von q^{ter} , und also in den $\binom{n+1}{2}$ Variablen y und p homogen von $(q+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind,

*) Crelles Journal 140, S. 48—81 (besonders § 2 und das Theorem auf S. 53).

bilden nämlich einen Modul $\mathfrak{M}(\varrho)$, und zwar sind, wie wir sahen, für den Modul $\mathfrak{M}(0)$ die Formen der Basis

$$(5) \quad \gamma_0(p) = p_{ik}p_{rs} + p_{ir}p_{sk} + p_{is}p_{kr}$$

und für den Modul $\mathfrak{M}(\varrho)$ ($\varrho \geq 1$) die Formen einer homogenen Basis

$$(5*) \quad \gamma_1(y, p) = y_j(p_{ik}p_{rs} + p_{ir}p_{sk} + p_{is}p_{kr})$$

$$(6) \quad \gamma_2(y, p) = y_r p_{ik}p_{st} + y_s p_{ik}p_{tr} + y_r p_{ik}p_{rs};$$

aus (5*) und (6) werden alle Funktionen des Moduls $\mathfrak{M}(\varrho)$ ($\varrho \geq 1$) mit homogenen Funktionen ($\varrho - 1$) Grades der y zusammengesetzt. Weil nun wegen der Normierungen (5a) und (6a) die φ_ϱ den Differentialgleichungssystemen

$$\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi_0(p) = 0 \quad \text{für } p = 0$$

$$\text{und } \gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi_\varrho(y, p) = 0, \quad \gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi_\varrho(y, p) = 0 \quad \text{für } \varrho \geq 1$$

genügen, so gehören sie nach dem Fischerschen Theorem tatsächlich zur Restschar; und folglich ist jedes φ_ϱ und also auch das Linienlement durch die Normierungen (5a) und (6a) eindeutig bestimmt.

Der Normierung (5a) entspricht folgende Identität*) zwischen den Vierindizessymbolen für beliebige Koordinaten x_i :

$$(5b) \quad (ik, rs) + (ir, sk) + (is, kr) = 0.$$

Die Krümmungsform ist also hinsichtlich der den Gleichungen (5) entsprechenden Identitäten zwischen den p'_{ik} schon normiert. — Der Normierung (6a) entspricht, wie wir in § 2 zeigen werden, folgende Identität: Bezeichnet man (vgl. Formel (4)) das Aggregat der vier zweiten Ableitungen im Vierindizessymbol (ik, rs) mit $[ik, rs]$, so ist identisch

$$(6b) \quad \frac{\partial [ik, st]}{\partial x_r} + \frac{\partial [ik, tr]}{\partial x_s} + \frac{\partial [ik, rs]}{\partial x_t} = 0.**$$

wie man durch Rechnung sofort bestätigen kann. — Übrigens enthält (5b) die Relation

$$(5b^*) \quad [ik, rs] + [ir, sk] + [is, kr] = 0.$$

Es mögen hier noch gleich einige Beziehungen zwischen den $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ und (ik, rs) , welche aus der Umstellung oder Gleichsetzung der Indizes folgen, zusammengestellt werden. Aus der formalen Bildung von (1) folgt, daß

$$(7) \quad \mathfrak{P}_{ik,rs} = \mathfrak{P}_{ki,rs} = \mathfrak{P}_{rs,ik} = \mathfrak{P}_{sr,ki} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{ik,rs} = -\mathfrak{P}_{ki,rs} = -\mathfrak{P}_{sk,ir}$$

ist. Entsprechend folgt aus der Definition der (ik, rs) :

*) Christoffel I. c. S. 55, oder Lipschitz, Crelles J. 70, S. 101 f.

**) Dies ist ein Teil der Identität von Bianchi. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei (5), 11, (1902), S. 3.

$$(7a) \quad (ik, rs) = (ki, sr) = (rs, ik) = (sr, ki) \quad \text{und} \\ (ik, rs) = -(ki, rs) = -(ik, sr).$$

Endlich sollen die Größen $\mathfrak{P}_{ii,rs}$, $\mathfrak{P}_{ik,rr}$ und die \mathfrak{P} mit 3 oder 4 gleichen Indizes, die zwar in (1) nicht auftreten, da, wo sie im folgenden vorkommen, 0 bedeuten — (hierdurch schreiben sich manche Formeln einfacher) —, während die entsprechenden Vierindizessymbole (ii, rs) , (ik, rr) und die mit 3 oder 4 gleichen Indizes nach Definition sämtlich = 0 sind.

§ 2. Vorbereitende Untersuchungen.

Setzen wir das Linienelement (1) in die Gestalt:

$$(2) \quad ds^2 = \sum b_{ik} dy_i dy_k,$$

so finden wir für die b_{ii} und b_{ik} , indem wir von der Schlußbemerkung des § 1 Gebrauch machen,

$$(8) \quad b_{ii} = 1 + \sum_{q,s} \mathfrak{P}_{iq, is} y_q y_s, \quad b_{ik} = \sum_{q,s} \mathfrak{P}_{iq, ks} y_q y_s,$$

wo in den Summen q und s unabhängig voneinander die Werte 1, 2, ..., n durchlaufen. Mit Hilfe dieser Formeln kann man die Vierindizessymbole (ik, rs) als Potenzreihen der y ausrechnen und feststellen, wie sich deren Koeffizienten aus den Koeffizienten der gegebenen Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ zusammensetzen.

Zunächst ergibt sich für die Determinante B des Linienelementes (2):

$$(9) \quad B = 1 + (\mathfrak{P})_1(y)_2 + (\mathfrak{P})_2(y)_1 + \cdots + (\mathfrak{P})_n(y)_{2n},$$

und für die Unterdeterminanten

$$(9a) \quad \begin{aligned} B_{ii} &= 1 + (\mathfrak{P})_1(y)_2 + \cdots + (\mathfrak{P})_{n-1}(y)_{2n-2}, \\ B_{ik} &= (\mathfrak{P})_1(y)_2 + \cdots + (\mathfrak{P})_{n-1}(y)_{2n-2}. \end{aligned}$$

Hier soll, wie auch im folgenden, $(\mathfrak{P})_i(y)_m$ ein Polynom m^{ter} Dimension in den y , dessen Koeffizienten in den Potenzreihen \mathfrak{P} von i^{ter} Dimension sind, bedeuten. Da nun ferner das Dreindizessymbol

$$(10) \quad \begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right] &= - \sum_{\sigma} \mathfrak{P}_{il, ks} y_{\sigma} - \sum_{q} \mathfrak{P}_{iq, ki} y_q \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{q,s} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{P}_{iq, ks}}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{iq, ls}}{\partial y_k} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{iq, ks}}{\partial y_l} \right\} y_q y_s \end{aligned}$$

ist, also die Gestalt hat:

$$(10a) \quad \left[\begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right] = (\mathfrak{P})_1(y)_l + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right)_l y_l,$$

so erhält man für den zweiten Teil

$$\{ik, rs\} = 2 \sum_{\mu, r} \frac{B_{\mu, r}}{B} \left(\begin{bmatrix} ir \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ks \\ r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} is \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kr \\ r \end{bmatrix} \right)$$

des Riemannschen Vierindizessymbols (ik, rs) , wenn man noch $\frac{B_{\mu, r}}{B}$ nach Potenzen von y entwickelt (eine Entwicklung, die für hinreichend kleine y sicher konvergiert, weil für $y_i = 0$ $B = 1$ wird):

$$(11) \quad \begin{aligned} \{ik, rs\} &= (\mathfrak{P})_2(y)_2 + (\mathfrak{P})_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right)_1 (y)_3 + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y^2} \right)_2 (y)_4 \\ &\quad + (\mathfrak{P})_3(y)_4 + (\mathfrak{P})_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right)_1 (y)_5 + (\mathfrak{P})_1 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y^2} \right)_2 (y)_6 + \dots \end{aligned}$$

Dagegen ergibt sich für den ersten Teil

$$[ik, rs] = \frac{\partial^2 b_{ir}}{\partial y_k \partial y_a} + \frac{\partial^2 b_{ks}}{\partial y_i \partial y_r} - \frac{\partial^2 b_{is}}{\partial y_k \partial y_r} - \frac{\partial^2 b_{kr}}{\partial y_i \partial y_a}$$

des Vierindizessymbols $(ik, rs)^*$ mit Benutzung der Normierung (5a):

$$(12) \quad [ik, rs] = 6 \mathfrak{P}_{ik, rs} + 3 \sum_q \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{ik, rq}}{\partial y_s} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{rs, iq}}{\partial y_k} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik, sq}}{\partial y_r} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{rs, iq}}{\partial y_i} \right) y_q$$

$$+ \sum_{q, a} \left\{ \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{iq, ra}}{\partial y_k \partial y_s} + \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{kq, ia}}{\partial y_i \partial y_r} - \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{iq, sa}}{\partial y_k \partial y_r} - \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{kq, ia}}{\partial y_i \partial y_s} \right\} y_q y_a$$

und also formal:

$$(13) \quad [ik, rs] = (\mathfrak{P})_1 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right)_1 (y)_1 + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y \partial y} \right)_1 (y)_2.$$

Wir nennen nun die Koeffizienten der Glieder m^{ter} Ordnung in den Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik, rs}$ kurz Koeffizienten m^{ter} Ordnung, und bezeichnen das Glied 0^{ter} Ordnung mit $a_{ik, rs}$. Dann können wir (11) und (13) auch so schreiben:

$$(11a) \quad \{ik, rs\} = \{y\}_2 + \{y\}_3 + \{y\}_4 + \dots,$$

wo $\{y\}_m$ ein Polynom m^{ten} Grades in den y ist, dessen Koeffizienten *Polynome aus Koeffizienten* 0^{ter} bis $(m-2)^{ter}$ Ordnung der \mathfrak{P} sind, — und ferner unter Beachtung von (12)

$$(13a) \quad [ik, rs] = 6a_{ik, rs} + [y]_1 + [y]_2 + [y]_3 + \dots,$$

wo $[y]_m$ ein Polynom m^{ten} Grades ist y ist, dessen Koeffizienten aus Koeffizienten von genau m^{ter} Ordnung der \mathfrak{P} linear mit rationalen Zahlfaktoren gebildet sind.

Seien nun die Riemannschen Vierindizessymbole als Potenzreihen der y_i gegeben, deren Entwicklungskoeffizienten die mit bekannten rationalen

* Es ist also $(ik, rs) = [ik, rs] + \{ik, rs\}$.

Zahlfaktoren multiplizierten Ableitungen der (ik, rs) , gebildet für den Punkt $O(y_i = 0)$, sind. Dann lehren die Formeln (11a) und (13a) folgendes:

Das Glied 0^{ter} Ordnung von (ik, rs) ist gleich $6\alpha_{ik,rs}$; denn setzt man $y_i = 0$, so verschwinden in (13a) und (11a) alle übrigen Glieder. — m -malige Differentiation und Nullsetzen der y_i liefert links in (11a) und (13a) einen Koeffizienten m^{ter} Ordnung von (ik, rs) , rechts eine lineare Verbindung von Koeffizienten m^{ter} Ordnung der \mathfrak{P} (aus (13a)), vermehrt um ein Polynom aus Koeffizienten 0^{ter} bis $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} (aus (11a)). Nimmt man letztere als bekannt an, so erhält man ein System von linearen Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten für die Koeffizienten m^{ter} Ordnung der \mathfrak{P} , deren „rechte“ Seiten sich aus den Koeffizienten m^{ter} Ordnung der (ik, rs) und den Koeffizienten 0^{ter} bis $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} zusammensetzen. Die Anzahl dieser linearen Gleichungen für die Koeffizienten m^{ter} Ordnung der \mathfrak{P} ist genau so groß, wie die Anzahl dieser Koeffizienten. Da sich nun (s. o.) die Koeffizienten 0^{ter} Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ eindeutig bestimmen lassen, folgt aus dem Vorhergehenden, daß sich sukzessive die Koeffizienten m^{ter} Ordnung der \mathfrak{P} aus den Koeffizienten m^{ter} und $(m-2)^{\text{ter}}$ bis 0^{ter} Ordnung der (ik, rs) eindeutig berechnen lassen werden, wenn man nachweisen kann, daß die Determinante des linearen Gleichungssystems $\neq 0$ ist. Dieser Nachweis aber ist auf dem bisher eingeschlagenen Wege nicht möglich, weil man sehr bald, wegen der immer größer werdenden Anzahl von Gliedern bestimmter Ordnung allen Überblick verliert. Ich werde deshalb im folgenden Paragraphen mich einer etwas veränderten Methode bedienen, jedoch die Hauptresultate dieses Paragraphen wieder benutzen.

Nur folgendes sei hier noch bemerkt. Die Zahlfaktoren der „linken“ Seiten der linearen Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten der \mathfrak{P} röhren allein aus (13a), nicht aus (11a) her. Die „linken“ Seiten dieser Gleichungen sind aber in der Weise voneinander abhängig, wie es die Identitäten (6b) und die daraus durch Differentiation abgeleiteten anzeigen. Deshalb verschwinden die Determinanten und es könnte scheinen, als ob sich die Koeffizienten der \mathfrak{P} nicht eindeutig bestimmen ließen. Nimmt man aber die aus den Normierungsbedingungen (6a) für die Koeffizienten der \mathfrak{P} sich ergebenden Bedingungen statt der abhängigen Gleichungen hinzu und berücksichtigt, daß es ebenso viele unabhängige Bedingungen (6a) wie Identitäten (6b) gibt, so wird die Eindeutigkeit wieder hergestellt werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung habe ich in den einfachsten Fällen direkt nachweisen können; allgemein folgt sie rückwärts aus dem Resultat von § 3. Dies ist das Entsprechen (6a) und (6b), von dem ich in § 1 sprach.

§ 3. Bestimmung des Linienelementes aus der Krümmungsform.

Ich schreibe zunächst das Linienelement in Riemannschen Normalkoordinaten für das Folgende zweckmäßiger in der Gestalt:

$$(14) \quad ds^2 = \sum_i dy_i^2 + \sum_{\substack{(i k, r s) \\ m=0}} \frac{1}{m!} (\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m} y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} \dots y_{\lambda_m} (y dy)_{ik} (y dy)_{rs},$$

wo $(\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m}$ die m^{te} Ableitung von $\mathfrak{P}_{ik,rs}(y)$ nach $y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \dots, y_{\lambda_m}$, gebildet für $y_i = 0$, bedeutet und $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ alle Kombinationen der Elemente 1, 2, 3, ..., n zu je m mit Wiederholung und Berücksichtigung der Anordnung durchläuft. $(\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m}$ ist also konstant und bis auf einen Zahlfaktor ein Koeffizient m^{ter} Ordnung von $\mathfrak{P}_{ik,rs}(y)$.

(14) ist eine quadratische Form der Differentialen dy_i und werde mit $\varphi(dy, dy)$ bezeichnet. Dann bedeutet $\varphi(\delta y, \delta y)$ dieselbe quadratische Form in den Differentialen δy_i und $\varphi(dy, \delta y)$ die Polarform beider. Jetzt kann man nach der Vorschrift Riemanns in seiner Pariser Preisarbeit*) die Krümmungsform K für das Linienelement $ds^2 = \varphi(dy, dy)$ unter Benutzung des Kalküls mit Differentialen oder Variationen**) so bilden:

$$(15) \quad K = \delta^2 \varphi(dy, dy) - 2d\delta\varphi(dy, \delta y) + d^2\varphi(\delta y, \delta y),$$

mit der Forderung, daß die zweiten Variationen $d\delta y_i, d^2 y_i, \delta^2 y_i$ aus den drei Bedingungen

$$(15a) \quad \begin{aligned} D\varphi(d, \delta) - \delta\varphi(d, D) - d\varphi(\delta, D) &= 0, \\ D\varphi(d, d) - 2d\varphi(d, D) &= 0, \\ D\varphi(\delta, \delta) - 2\delta\varphi(\delta, D) &= 0, \end{aligned}$$

wo D eine beliebige Variation bezeichnet, bestimmt werden. (Die in (15) scheinbar auftretenden dritten Variationen heben sich gegenseitig weg.)

Bildet man nun (15) und (15a) für die quadratische Form

$$(2) \quad ds^2 = \varphi(dy, dy) = \sum_{i,k} b_{ik}(y) dy_i dy_k,$$

so liefert, wie man sofort sieht, (15) erstens Glieder, welche linear in den zweiten Ableitungen der b_{ik} sind und als Faktoren nur erste Variationen dy und δy haben und zweitens Glieder, welche nur erste und nullte Ableitungen der b_{ik} , aber mindestens eine zweite Variation enthalten, — während (15a) als nullzusetzende Faktoren der willkürlichen Dy_i Aggre-

*) Werke, 2. Aufl., S. 402.

**) Dieser wurde außer von Riemann (l. c.) besonders von Lipschitz (Crelles Journal, Bd. 70, 71, 72, 82) benutzt.

gute liefert, deren Glieder *nur* erste und nullte Ableitungen der b_{ik} enthalten. Daraus folgt: wenn man mit Hilfe von (15a) die zweiten Variationen aus (15) eliminiert, so bleiben dabei *die* Glieder von (15) vollkommen unverändert, welche die *höchsten* (zweiten) Ableitungen der b_{ik} enthalten; und dies sind zugleich die Glieder von (15), welche, wenn man (15a) noch nicht angewandt hat, nur die ersten Variationen dy und δy enthalten. Man kann daher (15) und (15a) zusammenziehen, indem man unter Benutzung des Kongruenzzeichens schreibt:

$$(16) \quad K \equiv \delta^2 \varphi(d, d) - 2d\delta\varphi(d, \delta) + d^2\varphi(\delta, \delta) \quad (\text{mod niedrigere Glieder}),$$

wo unter *niedrigeren Gliedern* diejenigen verstanden sein sollen, welche niedrigere Ableitungen der b_{ik} als die höchsten jeweils vorkommenden enthalten. Die niedrigeren Glieder haben, unter Berücksichtigung der Bildungsweise (15) allein, mindestens eine zweite oder höhere Variation der y_i als Faktor, während die höchsten Glieder nur erste Variationen als Faktoren besitzen.

In demselben Sinne kann man für die m^{te} kovariante Ableitung (vgl. Teil II, § 1) der Krümmungsform K auch schreiben:

$$(17) \quad K^{(m)} \equiv \delta^{m+2} \varphi(d, d) - 2d\delta^{m+1} \varphi(d, \delta) + d^2\delta^m \varphi(\delta, \delta) \quad (\text{mod niedrigere Glieder}).$$

Nun bilden wir diese m^{te} kovariante Ableitung für das Linienelement (14), also für Riemannsche Normalkoordinaten und setzen $y_i = 0$. Wir finden:

$$(18) \quad \begin{aligned} (K^{(m)})_{y=0} &\equiv \delta^{m+2} \sum_{(i k, r s) \lambda} \frac{1}{m!} (\alpha_{i k, r s})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_m} (y dy)_{i k} (y dy)_{r s} \\ &- 2d\delta^{m+1} \sum_{(i k, r s) \lambda} \frac{1}{m!} (\alpha_{i k, r s})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_m} (y dy)_{i k} (y \delta y)_{r s} \\ &+ d^2\delta^m \sum_{(i k, r s) \lambda} \frac{1}{m!} (\alpha_{i k, r s})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_m} (y \delta y)_{i k} (y \delta y)_{r s} \end{aligned} \quad (\text{mod niedrigere Glieder}),$$

wo die Summe nur noch über ik, rs und die λ geht, aber m fest ist. Denn die Glieder, welche in den y_i von höherer als $(m+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind, verschwinden wegen $y_i = 0$, weil nach Ausführung der Variationen mindestens ein y_i mit keinem Variationszeichen versehen ist, und die Glieder, welche in den y_i von niedrigerer als $(m+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind, enthalten notwendig eine höhere als die erste Variation, sind also „niedrigere“ Glieder, so daß also nur noch die Glieder, welche in den y_i von $(m+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind, für uns von Belang sind.

Bei Ausführung der Differentiationen in (18) haben wir nur Glieder mit ersten Variationen zu berücksichtigen. Es kommen aber in der

zweiten und dritten Summe solche Glieder, welche einen *freien Faktor* δy_{i_k} enthalten, nicht in Betracht, da dann notwendig ein verschwindender *Determinantenfaktor* $(\delta y \delta y)_{rs}$ auftritt; es können also nur Faktoren

$$\delta y_{i_1} \cdots \delta y_{i_m} (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs}$$

vorkommen. Hierbei dreht sich in der zweiten Summe das Vorzeichen um, da dort zunächst der Faktor

$$\delta y_{i_1} \cdots \delta y_{i_m} (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs}$$

auftritt und $(\delta y \delta y)_{ik} = -(\delta y \delta y)_{ik}$ ist. Also wird

$$(19) \quad (K^{(m)})_{y=0} \equiv \left\{ \sum_{(ik, rs) \in \lambda} (a_{ik, rs})_{i_1 \dots i_m} \delta y_{i_1} \cdots \delta y_{i_m} (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs} \right\} \frac{c_{1,m} + c_{2,m} + c_{3,m}}{m!} \\ (\text{mod niedrigere Glieder}),$$

wo $c_{1,m}$, $c_{2,m}$, $c_{3,m}$ positive Zahlkoeffizienten sind, welche angeben, wie oft in jeder der drei Summen von (18) durch m -malige Differentiation der Term $\delta y_{i_1} \cdots \delta y_{i_m} (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs}$ entsteht; ihre Summe kann also nicht verschwinden. Die Gleichung (19) enthält jetzt als rechts hingeschriebene Glieder genau die Glieder höchster Ordnung von $(K^{(m)})_{y=0}$; denn die $(m+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen der b_{ik} für $y_i = 0$ sind lineare Verbindungen der Koeffizienten m^{ter} Ordnung der $\mathfrak{P}(y)$ (vgl. Formel (8)), und diese treten allein in (19) auf, und an den Gliedern höchster Ordnung ist bei unserem Verfahren nichts geändert worden, während die Glieder niedrigerer Ordnung verschwunden sind.

Ist nun anderseits die Riemannsche Krümmungsform

$$(20) \quad K = \sum_{(ik, rs)} (ik, rs) (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs}$$

dadurch gegeben, daß die (ik, rs) als Potenzreihen der Normalkoordinaten y_i bekannt sind, so kann man vollkommen eindeutig alle kovarianten Ableitungen von K für $y_i = 0$ berechnen; denn dazu sind nur Differenzierungen nötig. Ist nämlich

$$(21) \quad K = \sum_{\substack{(ik, rs) \in \lambda \\ m=0}} \frac{1}{m!} (k_{ik, rs})_{i_1 i_2 \dots i_m} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m} (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs}$$

so folgt:

$$(22) \quad (K^{(m)})_{y=0} \equiv \left\{ \sum_{(ik, rs) \in \lambda} \frac{1}{m!} (k_{ik, rs})_{i_1 \dots i_m} \delta y_{i_1} \cdots \delta y_{i_m} (\delta y \delta y)_{ik} (\delta y \delta y)_{rs} \right\} \frac{c_m}{m!} \\ (\text{mod niedrigere Glieder}),$$

wo c_m analoge Bedeutung hat, wie oben $c_{1,m}, c_{2,m}, c_{3,m}$. Denn die mit höheren Variationen behafteten Glieder haben ja zunächst niedrigere als m^{te} Ab-

leitungen der Vierindizessymbole als Faktoren, und diese (vgl. Formel (4)) enthalten nicht die $(m+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen der b_{ik} , wie es die hingeschriebenen Glieder tun.

Trotzdem kann man (22) noch nicht mit (19) vergleichen. Denn (22) ist aus (20) gewonnen, wo in die Vierindizessymbole auch niedrigere Glieder hinsichtlich der Ordnung der Ableitungen von b_{ik} eingegangen sind; denn bei Bildung der Vierindizessymbole sind die Eliminationsbedingungen (15a) benutzt worden. Es fragt sich nun, ob man diese niedrigeren Glieder, welche also von niedrigeren als $(m+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen der b_{ik} herstammen, aus (22) abspalten kann.

Diese Frage werden wir bejahen und damit das in Rede stehende Theorem, wie folgt, beweisen: Angenommen die Koeffizienten nullter bis $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} seien schon berechnet, dann lassen sich auch die Koeffizienten m^{ter} Ordnung für ein als normiert vorausgesetztes Linien-element (1) eindeutig berechnen. Wir haben nämlich in § 2 bereits auseinandergesetzt, daß das Vierindizessymbol (ik, rs) aus zwei Teilen $[ik, rs]$ und $\{ik, rs\}$ besteht, und folglich auch seine m^{ten} Ableitungen für $y_i = 0$, also die $(k_{ik, rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ aus zwei Teilen bestehen, von denen der erste nur Ableitungen $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung der b_{ik} enthält, während der zweite aus solchen 0^{ter} bis $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gebildet ist. Zugleich haben wir damals nachgewiesen (Formel (11a)), daß die Koeffizienten m^{ter} Ordnung dieses zweiten Teiles $\{ik, rs\}$ sich aus Koeffizienten 0^{ter} bis $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} zusammensetzen. Diese zweiten Teile der Koeffizienten m^{ter} Ordnung der (ik, rs) und somit auch die in den $(k_{ik, rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ noch enthaltenen, von Gliedern niedrigerer Ordnung herrührenden Bestandteile sind daher nach der Voraussetzung unseres jetzigen Induktionsschlusses bekannt. Spaltet man sie ab, so erhält man

$$(23) \quad (K^{(m)})_{y=0} = \left\{ \sum_{(ik, rs)\lambda} (k_{ik, rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} \delta y_{\lambda_1} \dots \delta y_{\lambda_m} (dy \delta y)_{ik} (dy \delta y)_{rs} \right\} \frac{c_m}{m!} \\ (\text{mod niedrigere Glieder}),$$

wo wie in (19) die hingeschriebenen Glieder genau diejenigen höchster Ordnung in den Ableitungen von b_{ik} sind. Nimmt man endlich noch die rechte Seite von (19) als so normiert an, wie es die Bedingungen (5a) und (6a), wenn man dort y_i durch δy_i ersetzt, verlangen, während (23) in sich normiert ist, weil es die höchsten Glieder der normierten Krümmungsform (vgl. die Formeln (5b*) und (6b)) unverändert enthält, — und betrachtet man dann (19) und (23) als Formen* der δy_i und dy_i , so ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die $(\alpha_{ik, rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ eindeutig aus den

* Die von uns benutzten Differentialformen sind ja bekanntlich invariante Bildungen.

reduzierten $(k_{ik,rs}^*)_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$. Erinnert man sich noch, daß wir in § 2 zeigten, daß sich die Koeffizienten nullter Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ direkt bestimmen lassen, so ist unser Theorem bewiesen.

In Formeln ergibt sich aus (19) und (23)

$$(24) \quad (\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} = \frac{e_m}{e_{1,m}} + \frac{e_m}{e_{2,m}} + \frac{e_m}{e_{3,m}} (k_{ik,rs}^*)_{\lambda_1 \dots \lambda_m} \\ = \frac{e_m}{e_{1,m}} + \frac{e_m}{e_{2,m}} + \frac{e_m}{e_{3,m}} (k_{ik,rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + \begin{cases} \text{Polynom aus Koeffizienten nullter bis} \\ (m-2)^{\text{ter}} \text{ Ordnung von } K. \end{cases}$$

Es ist also ein Koeffizient m^{ter} Ordnung von $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ gleich dem entsprechenden Koeffizienten m^{ter} Ordnung von (ik, rs) , multipliziert mit einem positiven Zahlenfaktor, der für alle Koeffizienten m^{ter} Ordnung derselbe ist, das Ganze vermehrt um ein Polynom aus Koeffizienten von höchstens $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Vierindessymbole. Für die Koeffizienten nullter und erster Ordnung füllt dies Polynom fort, und man hat einfach

$$(24a) \quad \alpha_{ik,rs} = \gamma_0 \cdot k_{ik,rs} \\ (\alpha_{ik,rs})_i = \gamma_1 \cdot (k_{ik,rs})_i,$$

wo $\gamma_0 = \frac{1}{6}$ und $\gamma_1 = \frac{1}{12}$ ist. Hieraus folgt sofort, daß, wenn der Raum das Krümmungsmaß 0 hat, das Linienelement (1) die Gestalt:

$$ds^2 = \sum_i dy_i^2$$

hat, also ein „Euklidisches“ ist.

Teil II.

§ 1. Die Christoffelschen Differentialkovarianten $G_4, G_5, G_6 \dots$

Mit der Riemannschen Krümmungsform K hängt aufs engste die von Christoffel in seiner Abhandlung „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades“^{*)} abgeleitete Differentialform G_4 zusammen. Führt man nämlich in

$$K = \sum (ik, rs) (dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) (dx_r \delta x_s - dx_s \delta x_r)$$

neue Differentiale Dx und Δx ein, und setzt voraus, daß alle vier Differentiale $dx, \delta x, Dx, \Delta x$ kogredient seien, so ist das Christoffelsche

$$G_4 = \sum (ik, rs) (dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) (Dx_r \Delta x_s - Dx_s \Delta x_r)^{**},$$

^{*)} Crelles Journal 70, S. 47 ff. u. S. 241 ff.

^{**)} Genau genommen muß man noch mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren um Christoffels G_4 zu erhalten. Dieser Faktor $-\frac{1}{2}$ stammt daher, daß das von mir im Anschluß

wo in der Summe sowohl ik als auch rs die $\binom{n}{2}$ verschiedenen Kombinationen zweier Indizes durchläuft. Hierfür kann man offenbar unter Beachtung der Schlußbemerkungen von I, § 1 auch schreiben

$$G_4 = \sum (ik, rs) dx_i \delta x_k D x_r \Delta x_s,$$

wo in der Summe i, k, r, s unabhängig voneinander von 1 bis n laufen, oder indem man die Bezeichnung zwecks Verallgemeinerung in ersichtlicher Weise ändert:

$$(25) \quad G_4 = \sum_{i_1 \dots i_4} (i_1 i_2 i_3 i_4) \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} \overset{3}{\delta} x_{i_3} \overset{4}{\delta} x_{i_4}.$$

Diese quadrilineare Differentialform der vier zu den dx_i kogredienten Systeme von Differentialen: $\overset{1}{\delta} x_i, \overset{2}{\delta} x_i, \overset{3}{\delta} x_i, \overset{4}{\delta} x_i$ ist bekanntlich eine Differentialkovariante des Linienelementes $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$.

Aus (25) kann man bekanntlich nach folgendem Verfahren, welches dem von Riemann in seiner Preisaufgabe angegeben entspricht*) und einfacher ist als das Christoffelsche, eine unbegrenzte Reihe weiterer *multilinearer Differentialformen* herleiten. Sei

$$(26) \quad G_m = \sum_{i_1 \dots i_m} (i_1 i_2 \dots i_m) \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} \dots \overset{m}{\delta} x_{i_m}$$

eine m -fach lineare Differentialform. Dann bilden wir

$$(27) \quad \begin{aligned} \delta G_m &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} \frac{\partial (i_1 i_2 \dots i_m)}{\partial x_l} \overset{1}{\delta} x_l \overset{2}{\delta} x_{i_1} \overset{3}{\delta} x_{i_2} \dots \overset{m}{\delta} x_{i_m} \\ &\quad + \sum_{i_2 \dots i_m} (l i_2 \dots i_m) \overset{1}{\delta} \overset{2}{\delta} x_l \overset{3}{\delta} x_{i_2} \dots \overset{m}{\delta} x_{i_m} \\ &\quad + \sum_{i_1 l \dots i_m} (i_1 l \dots i_m) \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_l \overset{3}{\delta} x_{i_2} \dots \overset{m}{\delta} x_{i_m} + \dots \end{aligned}$$

Aus (27) eliminieren wir nun die zweiten Differentiale $\overset{2}{\delta} x_l$ mittels der Bedingung:

an Riemann (l. c.) benutzte Vierindizessymbol (ik, rs) gerade das $-\frac{1}{2}$ fache des von Christoffel benutzten Vierindizessymbols (ik, rs) ist. — Da der Faktor $-\frac{1}{2}$ für die folgenden Untersuchungen ganz unwesentlich ist, werde ich die oben hingeschriebene Differentialform einfach mit G_4 und die daraus abgeleiteten mit G_5, G_6, \dots bezeichnen, wobei dann eben zu beachten ist, daß man noch mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren muß, um die Christoffelschen Bildungen zu erhalten.

*) Vgl. auch Lipschitz, Crelles Journal 72, S. 1 ff.

$$(28) \quad D \sum a_{ii_r} \delta x_i \overset{r}{\delta} x_{i_r} - \delta \sum a_{ik} \delta x_i D x_k - \delta \sum a_{i_r k} \overset{r}{\delta} x_{i_r} D x_k = 0,$$

die genau der Bedingung (15a) entspricht und als nullzusetzende Faktoren der willkürlichen Dx_k die Bedingungen liefert:

$$(29a) \quad \sum_i a_{ik} \overset{r}{\delta} \delta x_i + \sum_{i i_r} \left[\begin{smallmatrix} i i_r \\ k \end{smallmatrix} \right] \delta x_i \overset{r}{\delta} x_{i_r} = 0$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{A_{ik}}{A}$ und Summation nach k :

$$(29b) \quad \overset{r}{\delta} \delta x_i + \sum_{i i_r} \left[\begin{smallmatrix} i i_r \\ l \end{smallmatrix} \right] \delta x_i \overset{r}{\delta} x_{i_r} = 0.$$

Setzt man nun die zweiten Differentiale aus (29b) in (27) ein, so erhält man die $(m+1)$ -fach lineare Differentialform

$$(30) \quad G_{m+1} = \sum (i_1 i_2 \cdots i_m) \overset{1}{\delta} x_i \overset{2}{\delta} x_{i_1} \overset{3}{\delta} x_{i_2} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m}, \quad \text{wo offenbar}$$

$$(31) \quad (i_1 i_2 \cdots i_m) = \frac{\partial (i_1 i_2 \cdots i_m)}{\partial x_i} - \sum_l \left[\left(\begin{smallmatrix} i i_l \\ l \end{smallmatrix} \right) (l i_2 \cdots i_m) + \left(\begin{smallmatrix} i i_2 \\ l \end{smallmatrix} \right) (i_1 l \cdots i_m) + \cdots + \left(\begin{smallmatrix} i i_m \\ l \end{smallmatrix} \right) (i_1 i_2 \cdots l) \right].^*)$$

Die so erhaltenen Differentialformen $G_5 G_6 \cdots$ sind zufolge ihrer Bildungsweise, ebenso wie G_4 , Differentialkvarianten. Das Gesetz, nach dem die Koeffizienten $(i_1 i_2 \cdots i_m)$ aus den Koeffizienten $(i_1 i_2 \cdots i_m)$ gebildet werden, nennt man *kovariante Differentiation*.

Wir machen nun aus, daß man, bevor man aus G_{m+1} den Ausdruck G_{m+2} bildet, in G_{m+1} : i durch i_{m+1} und δx_i durch $\overset{m+1}{\delta} x_{i_{m+1}}$ ersetzt, also:

$$(30a) \quad G_{m+1} = \sum_{i_1 \cdots i_{m+1}} (i_1 \cdots i_m i_{m+1}) \overset{1}{\delta} x_{i_1} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m} \overset{m+1}{\delta} x_{i_{m+1}},$$

wo $(i_1 \cdots i_m i_{m+1}) = (i_{m+1} i_1 \cdots i_m)$ ist, schreibt. Dann ist leicht zu sehen, daß, wenn man in $G_{m+1} : \delta$ und $\overset{1}{\delta}$ durch d und die übrigen $\overset{s}{\delta}$ einfach durch $\overset{s}{\delta}$ ersetzt, man das erhält, was in I, § 3 als m^{th} kovariante Ableitung der Krümmungsform K bezeichnet wurde. Denn nach unserer Ausmachung über die Numerierung ist zunächst (vgl. auch Formel (7a)):

$$(i_1 i_2 i_3 i_4, i_5 \cdots i_{m+4}) = -(i_2 i_1 i_3 i_4, i_5 \cdots i_{m+4}) = (i_3 i_1 i_4 i_5, i_6 \cdots i_{m+4}) \\ = -(i_1 i_2 i_4 i_5, i_6 \cdots i_{m+4})$$

*) Vgl. Christoffel, I. c. S. 56, 57.

und sonach kommen in G_{m+4} die ersten vier Differentiale in der Verbindung vor:

$$(\delta x_{i_1} \delta x_{i_4} - \delta x_{i_2} \delta x_{i_3})(\delta x_{i_3} \delta x_{i_4} - \delta x_{i_2} \delta x_{i_1}).$$

Wenn man nun noch die δ in der angegebenen Weise umändert, hat man

$$(30b) \quad G_{m+4}^* = \sum_{i_1 \cdots i_{m+4}} (i_1 i_2 i_3 i_4, i_5 \cdots i_{m+4}) \delta x_{i_1} \cdots \delta x_{i_{m+4}} (dx_{i_1} \delta x_{i_4} - dx_{i_2} \delta x_{i_3}) \cdot \\ \cdot (dx_{i_3} \delta x_{i_4} - dx_{i_2} \delta x_{i_1}) = K^{(m)}.$$

§ 2. Einführung von Normalkoordinaten und Bestimmung des Linienelementes aus den $(G_m)_{y_i=0}$.

Um den genauen Anschluß an I, § 3 zu gewinnen, wollen wir jetzt Riemannsche Normalkoordinaten einführen. Zunächst sieht man, daß in der Bezeichnungsweise von I, § 2 das Christoffelsche Dreiindizesymbol zweiter Art

$$\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = \sum_r \frac{B_{lr}}{B} \left[\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right]$$

die Gestalt hat

$$(32) \quad \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = (\mathfrak{P})_1(y)_1 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right)_1 (y)_2 + (\mathfrak{P})_2(y)_3 + (\mathfrak{P})_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right)_1 (y)_4 + \cdots$$

oder

$$(32a) \quad \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = \langle y \rangle_1 + \langle y \rangle_2 + \langle y \rangle_3 + \cdots,$$

wo $\langle y \rangle_m$ ein Polynom m^{ten} Grades in y bezeichnet, dessen Koeffizienten aus einem in den Koeffizienten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} linearen Teil und einem in den Koeffizienten nullter bis höchstens $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} ganzen rationalem Teil bestehen.

Nun unterscheidet sich unsere jetzige Bildung (30b), die wir ersichtlich auch schreiben können:

$$(33) \quad K^{(m)} = \sum_{(ik, rs) \lambda} (ikrs, \lambda_1 \cdots \lambda_m) \delta y_{i_1} \cdots \delta y_{i_m} (dy \delta y)_{ik} (dy \delta y)_{rs}$$

von der Bildung (22) dadurch, daß wir hier, von K ausgehend, nach jeder Variation sofort die zweiten Differentiale mit Hilfe von (29b) eliminiert haben, während dies dort nicht geschah, sondern die höheren Differentiale zu den Gliedern niedriger Ordnung gerechnet wurden, — abgesehen davon, daß wir damals $y_i = 0$ setzten. Man kann aber, wenn die kovarianten Ableitungen $K, K^{(1)}, K^{(2)}, \dots$ für $y_i = 0$ bekannt sind, sukzessive die auf der rechten Seite von (22) hingeschriebenen Terme finden, also von (33) die Terme abspalten, die durch die Elimination der höheren Differentiale mittels (29b) hinzugekommen sind.

Dies sieht man so ein: Bildet man vom Riemannschen Vierindizesymbol ausgehend nach Vorschrift (31) sukzessive die Klammersymbole

bis zu $(ikrs; \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)$, indem man jedes Klammersymbol nur durch die Riemannschen Vierindizessymbole, die Christoffelschen Dreiindizessymbole zweiter Art und die Ableitungen beider ausdrückt, so findet man, wie man durch Induktionsschluß sofort bestätigt,

$$(34) \quad (ik, rs; \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m) = \frac{\partial^m(ik, rs)}{\partial y_{\lambda_1} \partial y_{\lambda_2} \cdots \partial y_{\lambda_m}} + \Phi\left(R, \frac{\partial R}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{m-1}R}{\partial y^{m-1}}; C, \frac{\partial C}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{m-1}C}{\partial y^{m-1}}\right),$$

wo Φ eine ganze rationale Funktion seiner Argumente: der Riemannschen Vierindizessymbole R und ihrer Ableitungen bis zu den $(m-1)^{\text{ten}}$ und der Christoffelschen Dreiindizessymbole C und ihrer Ableitungen bis zu den $(m-1)^{\text{ten}}$ ist; und zwar ist jedes Glied von Φ linear in einer der nullten bis $(m-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen der Vierindizessymbole R . Speziell hat jedes $\frac{\partial^{m-1}R}{\partial y^{m-1}}$ gerade ein C als Faktor. Setzt man noch $y_i = 0$, so findet man wegen (32a) mit der Bezeichnung von Formel (21)

$$(35) \quad (ik, rs; \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)_{y=0} = (k_{ik, rs})_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m} + \Psi(R_0, R_1, \dots, R_{m-2}; \mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{m-2}),$$

wo Ψ eine ganze rationale Funktion seiner Argumente bedeutet und R , bzw. \mathfrak{P} , Koeffizienten ν^{ter} Ordnung der R und \mathfrak{P} bedeuten.

Hier steht nun links ein bekannter Koeffizient von $(K^{(m)})_{y=0}$, rechts ein gesuchter von Formel (22), vermehrt um ein Polynom aus Koeffizienten der R und \mathfrak{P} von niedrigerer als m^{ter} Ordnung. Nimmt man daher zum Zwecke eines Induktionsbeweises an, daß bereits alle Koeffizienten der Vierindizessymbole bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung aus den Koeffizienten von $(K^{(m-1)})_{y=0}$ bis $(K)_{y=0}$ bestimmt sind, und somit nach I, § 3 auch alle Koeffizienten der \mathfrak{P} bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bekannt sind, so lehrt Formel (35), daß man aus den Koeffizienten von $(K^{(m)})_{y=0}$ bis $(K)_{y=0}$, d. h. aus den Koeffizienten von $(G_{m+4})_{y=0}$ bis $(G_4)_{y=0}$ alle Koeffizienten von (22) eindeutig bestimmen kann. Für $m = 0$ hat man einfach:

$$(35a) \quad (ik, rs)_{y=0} = k_{ik, rs}.$$

Hiermit ist der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Formenreihe G_4, G_5, G_6, \dots , gebildet für $y_i = 0$ und zwischen den Koeffizienten nullter, erster, zweiter ... Ordnung der Riemannschen Krümmungsform aufgedeckt. — Man kann also aus der Formenreihe G_4, G_5, G_6, \dots , gebildet für $y_i = 0$, sowohl die Riemannsche Krümmungsform, als auch das Linienelement in Riemannschen Normalkoordinaten eindeutig berechnen, und zwar die Glieder nullter bis m^{ter} Ordnung, wenn $(G_4)_0$ bis $(G_{m+4})_0$ bekannt sind.

Wir knüpfen hier gleich noch folgende Bemerkung an: Sind statt $(G_4)_0 (G_5)_0 \dots$ ad inf. die Formen

$$(G_4)_0, (G_5)_0, \dots, (G_{m+4})_0 \text{ und } G_{m+5},$$

und zwar G_{m+5} nicht nur für $y_i = 0$, sondern für alle Werte y_i gegeben, so kann man gleichfalls die Riemannsche Krümmungsform K und das Linienelement eindeutig berechnen. In der Tat: Aus $(G_4)_0$ bis $(G_{m+4})_0$ kann man, wie wir oben sahen, die Glieder nullter bis m^{ter} Ordnung der \mathfrak{P} und von K berechnen. Ferner kann man aus G_{m+5} sukzessive $(G_{m+5})_0, (G_{m+6})_0, (G_{m+7})_0, \dots$ mit Hilfe von Formel (31) berechnen. Denn man kennt ja nach Voraussetzung die $(m+5)$ -Indizessymbole als Potenzreihen der y_i vollständig und wegen (32a) auch die Entwicklungen der Christoffelschen Dreindizesymbole, soweit man sie braucht: Um nämlich etwa $G_{(m+5)+p}$ für $y_i = 0$ aus G_{m+5} sukzessive für $p = 1, 2, \dots$ zu berechnen, braucht man die Glieder nullter bis p^{ter} Ordnung von G_{m+5} und die Glieder nullter bis $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Dreindizesymbole oder wegen (32a) die Glieder nullter bis $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der \mathfrak{P} ; und diese sind ja nach dem wiederholt schon angewandten Induktionsschluß bereits bekannt.

§ 3. Das Christoffelsche Äquivalenztheorem.

Sind zwei quadratische Differentialformen

$$F = \sum a_{ik} dx_i dx_k \quad \text{und} \quad F' = \sum a'_{\alpha\beta} dx'_\alpha dx'_\beta$$

mit nicht verschwindender Determinante ineinander transformierbar, so daß, wenn man

$$(36) \quad x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad \text{und folglich}$$

$$(37) \quad dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_n} dx'_n = \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} dx'_\alpha$$

setzt, F in F' übergeht, dann folgen, wenn man zur Abkürzung

$$(38) \quad \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = u^\alpha_i$$

schreibt, aus der Gleichung $F = F'$, die identisch in den x' und dx' erfüllt sein muß, die *Transformationsrelationen*

$$(39) \quad \sum_{ik} a_{ik} u^\alpha_i u^\beta_k = a'_{\alpha\beta}.$$

Da die G_m kovariante Differentialformen gegenüber der Transformation (36) (37) sind, folgen, wenn man das aus F gebildete

$$G_m = \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} (i_1 i_2 \dots i_m) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}$$

und das aus F' gebildete

$$G'_m = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)' dx'_{\alpha_1} dx'_{\alpha_2} \dots dx'_{\alpha_m}$$

setzt, aus der Beziehung $G_m = G'_m$ die weiteren *Transformationsrelationen*:

$$(40) \quad \sum_{i_1 i_2 \cdots i_m} (i_1 i_2 \cdots i_m) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2} \cdots u_{\alpha_m}^{i_m} = (e_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)'.$$

Die bisherigen Untersuchungen sind ganz allgemein gültig. Für das Folgende muß jedoch eine wesentliche *Einschränkung* gemacht werden. Man muß nämlich unterscheiden, ob eine quadratische Differentialform (d. i. ein Linienelement und somit auch der durch dieses definierte Raum) *Automorphismen* gestattet oder nicht. — Die Automorphismen nun können

1. in endlicher Zahl,
 2. in unendlicher Zahl ohne kontinuierliche Gruppe,
 3. in unendlicher Zahl mit kontinuierlicher Gruppe
- sowie in Kombinationen dieser drei Fälle vorhanden sein.

Im Falle 1. (von endlich vielen Automorphismen des ds^2) zerfallen die Punkte des Raumes bekanntlich in drei Klassen. Ein Punkt kann nämlich

- a) Fixpunkt für alle Automorphismen der Gruppe sein,
- b) Fixpunkt für die Automorphismen einer Untergruppe sein,
- c) sich bei allen Automorphismen (außer der identischen) ändern.

Auch im Falle 2. und 3. sind ähnliche Fallunterscheidungen möglich; doch bedürfen wir ihrer für das Folgende nicht. Es seien jedoch noch einige Literaturnachweise gegeben: Die möglichen *kontinuierlichen* Gruppen der Transformation eines Linienelementes in sich sind für den R_3 durch Christoffel*), von Mangoldt**) und Killing***) für den R_4 durch Bianchi†) aufgestellt worden.

Wir schließen nun für das Folgende, ebenso wie Christoffel, der jedoch nur an den Fall 3. zu denken scheint, alle quadratischen Differentialformen, welche eine Automorphie gestatten, von der Betrachtung aus. Dann beweisen wir folgendes von Christoffel in seiner Arbeit††) aufgestellte Theorem:

„Wenn durch die Transformationsrelationen, welche zu den Gleichungen

$$(41) \quad F = F', \quad G_4 = G'_4, \quad G_5 = G'_5, \quad \dots, \quad G_p = G'_p$$

gehören, die Werte der Unbekannten x und u ohne Widerspruch völlig bestimmt sind, und die nämlichen Werte der Unbekannten auch noch den Transformationsrelationen, welche sich aus der nächstfolgenden Gleichung

$$G_{p+1} = G'_{p+1}$$

*) Abhandlungen der Berliner Akademie 1868, S. 119 ff.

**) Crelles Journal 94, S. 27 ff.

***) Crelles Journal 109, S. 121 ff. bes. 149.

†) Memorie della Società Italiana delle Science (detta dei XL) (3) 11, S. 267.

††) Crelles Journal 70.

ergeben, genügen, so sind zugleich alle für die Transformation von F in F' erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und es wird allgemein

$$w_\alpha^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}.$$

Den Beweis führt Christoffel durch Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen.

Wir führen ihn in folgender Weise: Hat man aus den Transformationsrelationen, die zu den Gleichungen (41) gehören, irgend zwei zusammengehörige Wertesysteme x_1, x_2, \dots, x_n und x'_1, x'_2, \dots, x'_n ermittelt, so mache man diese zu Nullpunkten von Riemannschen Normalkoordinatensystemen $O(y_1, y_2, \dots, y_n)$ und $O'(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, deren Orientierung man beliebig wählen kann. Dann ist, wenn der Ursprung O und die Orientierung des Normalkoordinatensystems einmal fest gewählt sind, der Übergang von den (x_1, x_2, \dots, x_n) zu den (y_1, y_2, \dots, y_n) eindeutig und eindeutig umkehrbar; das Gleiche gilt für den Übergang von den $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ zu den $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$. Nun denke man sich alle auftretenden Differentialformen in Normalkoordinaten ausgedrückt, was ich durch Querstriche andeuten will. Errechnet man nun weiter aus den zu den Bedingungen:

$$(42) \quad (\bar{F})_0 = (\bar{F}')_0, \quad (\bar{G}_4)_0 = (\bar{G}'_4)_0, \quad (\bar{G}_5)_0 = (\bar{G}'_5)_0, \quad \dots, \quad (\bar{G}_p)_0 = (\bar{G}'_p)_0$$

(für $y_i = 0$ bzw. $y'_\alpha = 0$) gehörigen Transformationsrelationen die Werte der \bar{u}_α^i , welche, wenn die Transformation möglich ist, gleich $\frac{\partial y}{\partial y'_\alpha}$ sein müssen, und also die Orientierung der y_i Achsen gegen die y'_α Achsen geben; dann kennt man unter der Annahme ihrer Möglichkeit diejenige *orthogonale Transformation**), welche, wenn man O mit O' vereinigt denkt, das System $O(y_1, y_2, \dots, y_n)$ mit dem System $O'(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ zur Deckung bringt. Man kennt also auch die Beziehungen:

$$(43) \quad y_i = \bar{\varphi}_i(y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = \sum_a \bar{u}_\alpha^i y'_\alpha \quad \text{und}$$

$$(44) \quad dy_i = \sum_a \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial y'_\alpha} dy'_\alpha = \sum_a \bar{u}_\alpha^i dy'_\alpha.$$

Zeigt sich nun, daß die Gleichung

$$(45) \quad \bar{G}_{p+1} = \bar{G}'_{p+1},$$

wenn man (43) und (44) einführt, identisch in den y' und dy' erfüllt ist, dann ist die Transformation von F in F' möglich. Denn aus den linken

*) Die erste Gleichung (42) lautet nämlich $\sum_l dy_l^2 - \sum_a dy'_a^2$, und daher sind die \bar{u} konstant.

bzw. rechten Seiten von (42) und (45) kann man, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen festgestellt wurde, eindeutig die Linienelemente \bar{F} bzw. \bar{F}' berechnen und diese werden durch (43) (44) ineinander transformiert, und außerdem ist, wie wir sahen, der Übergang von F zu \bar{F} und ebenso der von F' zu \bar{F}' eineindeutig.

Dieser Satz behält, wenn man nur das Wort „völlig“ durch „endlich vieldeutig“ ersetzt, auch in den bisher ausgenommenen Fall 1. (wo das Linienelement endlich viele Automorphismen gestattet) seine volle Bedeutung. Man hat sich dann nur für eine bestimmte der endlich vielen möglichen Transformationen zu entscheiden; alsdann bleibt der Beweis wörtlich derselbe, nur daß, falls O zur Klasse b oder c gehört, die Zuordnung der Punkte O und O' und, wenn O zur Klasse a oder b gehört, die orthogonale Transformation von $O(y_1, \dots, y_n)$ zu $O'(y'_1, \dots, y'_n)$ endlich vieldeutig ist.

Im Falle von unendlich vielen Automorphismen verliert jedoch der Satz seine Bedeutung, da man nie auf bestimmte Transformationsrelationen kommt, wie weit man auch in der Gleichungskette (41) fortschreitet.

Göttingen, im Juli 1918.

